Б. М. Ивлев
С. М. Саакян
С. И. Шварцбурд

Алгебра и начала анализа

11

Дидактические материалы

·Просвещение·

Б. М. Ивлев
С. М. Саакян
С. И. Шварцбурд

Алгебра
и начала анализа

Дидактические материалы

для 11 класса

10-е издание

Москва
Просвещение
2007

УДК 372.8:[512+517]
ББК 74.262.21
И25

Рецензент:
учитель-методист школы № 67 Москвы
Л. И. Звавич

Ивлев Б. М.

И25 Алгебра и начала анализа : дидакт. материалы для 11 кл. / Б. М. Ивлев, С. М. Саакян, С. И. Шварцбурд.— 10-е изд.— М.: Просвещение, 2007.— 192 с.: ил.— ISBN 978-5-09-017913-3.

Дидактические материалы предназначены для проверки знаний учащихся 11 класса средней школы. Тексты самостоятельных работ даны в соответствии с действующим учебником «Алгебра и начала анализа. 10—11».

УДК 372.8:[512+517]
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-017913-3

© Издательство «Просвещение», 1991
© Художественное оформление.
Издательство «Просвещение», 2000
Все права защищены.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В пособии содержатся самостоятельные и контрольные работы по алгебре и началам анализа по курсу XI класса, материал для уроков обобщающего повторения и подготовки учащихся к письменному экзамену по алгебре и началам анализа, примерные варианты экзаменационных работ за курс средней школы, материал для проведения программированного контроля, карточки-задания для зачетов в условиях применения лекционно-семинарской системы преподавания математики.

Дидактические цели письменных работ различных видов учителям известны.

Самостоятельные работы обозначены буквой **С** с соответствующим номером. Например, **С — 5** — это пятая самостоятельная работа. Самостоятельные работы рассчитаны на 8—15 мин, могут быть проведены на различных этапах урока с последующим обсуждением результатов на том же уроке. Это важная форма работы для выработки навыков решения основных типов задач на уровне обязательных результатов обучения. Проведение таких работ может носить контролирующий характер. При этом работы учащихся проверяются и оцениваются учителем после урока. В классный журнал могут быть выставлены не все оценки.

К некоторым пунктам учебника даны 2—3 самостоятельные работы. Это обусловлено тем, что в системе упражнений к данному пункту даны различные группы типичных упражнений, имеющих большую образовательную ценность, в то же время тематическим планированием на изучение данного пункта отводится несколько уроков.

По усмотрению учителя любая из работ может быть предложена учащимся не полностью.

Самостоятельные работы даны в 10 вариантах. Первые два из них, как правило, несколько легче остальных вариантов. Последние два варианта содержат задания повышенной сложности. Они могут быть использованы для работы с учащимися, проявляющими повышенный интерес к математике. Эти задания могут быть даны учащимся после выполнения ими основной работы наравне со всеми учащимися класса в оставшееся время или использованы в качестве необязательных заданий для домашней работы, а также на занятиях математического кружка. Наличие 10 вариантов заданий позволит учителю один экземпляр книги разделить на 10 маленьких книг, каждая из которых дается отдельному ученику.

В контрольных работах некоторые упражнения вариантов 3 и 4 труднее по сравнению с соответствующими заданиями вариантов 1 и 2.

Основная часть контрольной работы оценивается по пятибалльной системе оценок. Так, например, за правильное выполнение заданий 1—4 (а, б) в контрольной работе № 1 ученику может быть выставлена оценка «5».

Необязательные задания контрольных работ адресованы учащимся, проявляющим повышенный интерес к математике. Они выполняются на отдельных листочках и сдаются учителю в случае полного решения задания. В противном случае работа над ними может быть продолжена дома или на занятии математического кружка.

Учитывая важность повторения в выпускном, XI классе, в книге помещены 18 повторительных работ (**ПС**), содержащих материал за курс алгебры и начал анализа средней школы.

Пособие содержит также 20 вариантов примерных экзаменационных работ, составленных на основе экзаменационных работ МО РФ за последние несколько лет. Эти варианты могут быть разобраны на уроках, что поможет организовать одновременно повторение соответствующих вопросов теории. Частично их можно использовать для домашних письменных работ, в процессе выполнения которых учащиеся приводят краткие теоретические обоснования, готовятся к экзамену. Эта работа способствует выработке и закреплению специальных умений и навыков решения задач, повышению уровня математической грамотности учащихся.

Предполагается проведение четырех зачетов в течение учебного года. В карточки к зачету, кроме упражнений на уровне обязательных программных требований, включены более сложные для учащихся, проявляющих повышенный интерес к математике, для участников математического кружка и факультативных занятий. Эти упражнения отмечены звездочкой. Карточки к зачету, включающие вопросы по теории и задачный материал, учащимся сообщаются заранее. Работа учащихся над предложенной системой заданий будет способствовать повышению их ответственности за результаты своего учебного труда, явится стимулом повышения уровня математической грамотности школьников.

В конце пособия даны ответы к большинству заданий самостоятельных, контрольных и других работ.

Замечания и предложения просим направлять по адресу: 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, д. 41, издательство «Просвещение», редакция математики.

Авторы

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Вариант 1

С—1

1. Докажите, что функция F есть первообразная для функции f на промежутке $(-\infty;\ \infty)$:

а) $F(x)=x^3-2x+1$, $f(x)=3x^2-2$;

б) $F(x)=2\sin 2x-2$, $f(x)=4\cos 2x$.

2. Найдите одну из первообразных для данной функции на $\boldsymbol{R}$:

а) $f(x)=x^5$; б) $\varphi(x)=-3{,}5$.

С—2

1. Для функции $f(x)=x^2$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M(-1;\ 2)$.

2. Для функции $f(x)=\sin x$ найдите две различные первообразные. Начертите график одной из них.

С—3

Найдите первообразную для функции:

а) $f(x)=2\sin x+3\cos x$;

б) $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}+x^2$ на $(0;\ \infty)$.

С—4

1. Запишите формулу, выражающую площадь $S(x)$ фигуры, заштрихованной на рисунке 1, как функцию от x. Вычислив производную, покажите, что $S'(x)=f(x)$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\sin x,\ y=0,\ 0\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3},$$

используя формулу $S=F(b)-F(a)$.

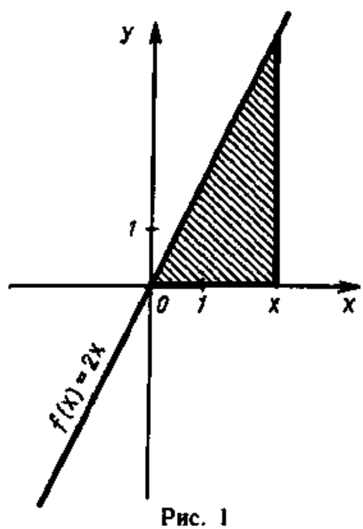

Рис. 1

С—5

Вычислите:

а) $\int\limits_2^5 4dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

С—6

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=x^2,\ x=1,\ x=3,\ y=0$;

б) $y=2\cos x,\ y=0,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$.

С—7

Точка движется по прямой так, что ее скорость в момент t равна $v(t)=10-0{,}2t$. Найдите путь, пройденный точкой за время от 3 до 10 с, если скорость измеряется в метрах в секунду.

С—8

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=2x^2,\ y=2x$;

б) $y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=0,\ 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$.

С—9

1. Вычислите:

а) $\int\limits_0^1 (x+1)^5 dx$; б) $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \cos\frac{x}{6}\, dx$.

2. Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями

$$y=3x+1,\ x=1,\ x=0,\ y=0.$$

С—10

1. Верно ли равенство $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=2-\sqrt{5}$?
2. Найдите значение числового выражения:

а) $\sqrt[4]{(-11)^4}$; б) $\sqrt[3]{25\cdot 135}$.

3. Пользуясь калькулятором или таблицами, найдите приближенное (с точностью до 0,0001) значение корня: а) $\sqrt{83{,}7}$; б) $\sqrt[3]{21}$.

4. Сравните числа $\sqrt[6]{80}$ и $\sqrt[3]{9}$.

С—11

1. Внесите множитель под знак корня в выражении $a\sqrt{2}$, где $a<0$.
2. Решите уравнение:

а) $x^3+18=0$; б) $(\sqrt[4]{x})^2+4\sqrt[4]{x}-5=0$.

3. Упростите выражение:

а) $\sqrt{4-\sqrt{7}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{7}}$;

б) $a+\sqrt[4]{a^4}$, где $a>0$.

С—12

1. Решите уравнение $\sqrt{5+\sqrt{x-1}}=3$.
2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=1,\\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3.\end{cases}$$

С—13

1. Найдите значение числового выражения:

а) $8^{\frac{5}{3}}$; б) $(\sqrt[3]{9})^{\frac{9}{2}}$;

в) $(9+\sqrt{73})^{\frac{1}{3}}\cdot(9-\sqrt{73})^{\frac{1}{3}}$.

2. Какое из чисел больше: $2^{\frac{6}{13}}$ или $2^{\frac{2}{7}}$?
3. Упростите выражение $\dfrac{u+8}{u^{\frac{2}{3}}-2\sqrt[3]{u}+4}$.

С—14

1. Изобразите схематически график функции $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.
2. Вычислите:

а) $2^{(\sqrt{2}+1)^2}:2^{2\sqrt{2}}$; б) $((\sqrt{6})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$.

3. Найдите область значений функции $f(x)=3^x-2$.

С—15

1. Решите уравнение:

а) $3^{x-4}=1$; б) $2^{7-3x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$.

2. Решите неравенство:

а) $5^{4x-7}>1$; б) $0{,}7^x<2\frac{2}{49}$.

С—16

1. Решите уравнение:

а) $2^{x+2}+2^x=5$; б) $9^x-6\cdot3^x-27=0$.

2. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x-3\left(\frac{1}{2}\right)^x+2>0.$$

С—17

1. Прологарифмируйте по основанию 10 выражение $7a^3\sqrt[3]{b^2}$.
2. Вычислите без таблиц и калькулятора:

а) $\log_{36}84-\log_{36}14$; б) $\dfrac{\lg 27+\lg 12}{\lg 2+2\lg 3}$.

3. Найдите $\log_{1,3}2{,}6$ с помощью таблиц или калькулятора (с точностью до 0,0001).

С—18

1. Сравните числа $\log_2 3$ и $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{5}$.
2. Найдите область определения функции

$$y=\log_{\frac{1}{3}}(3x+4).$$

3. Изобразите схематически график функции $y=2\lg x$.

С—19

1. Решите уравнение:

а) $\log_2(x^2-3x+10)=3$; б) $\log_3(3x-5)=\log_3(x-3)$.

2. Решите неравенство:

а) $\log_5(2x+3)>\log_5(x-1)$; б) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-5)<-2$.

С—20

1. Решите уравнение:

а) $\log_3^2 x-\log_3 x=2$; б) $\dfrac{2}{\lg x-3}+\dfrac{4}{\lg x+1}=1$.

2. Решите неравенство:

а) $\lg^2 x+3\lg x<4$; б) $4^{x-1}>7$.

С—21

Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x+y=8, \\ \log_{12} x+\log_{12} y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x+3^y=7, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}+3^{2y}=25. \end{cases}$

С—22

1. Выведите формулу, задающую функцию g, обратную к данной функции f. Найдите области определения и значений функции g:

а) $f(x)=4-3x$;

б) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $x\geqslant 0$.

2. По заданному графику функции f найдите значения обратной к ней функции g в точках -1; 2; 3 (рис. 2). Постройте график функции g, найдите ее область определения и область значений.

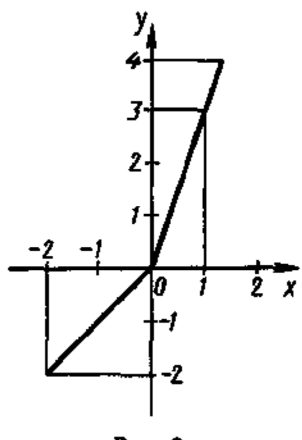

Рис. 2

С—23

1. Найдите производную функции:

а) $f(x)=e^{-5x}$; б) $f(x)=x\cdot 2^x$.

2. Напишите уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0, если $f(x)=e^{-x}$, $x_0=1$.

3. Найдите промежутки возрастания и убывания функции

$$f(x)=x\cdot e^{2x}.$$

4. Вычислите $\int\limits_1^3 e^x\,dx$.

С—24

1. Найдите производную функции:

а) $f(x)=\ln(2x+1)$; б) $f(x)=\log_3(2x^2-3x+1)$.

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=0,\ y=\frac{1}{x},\ x=1,\ x=3.$$

3. Найдите максимумы и минимумы функции

$$f(x)=x^2\ln x.$$

С—25

1. Найдите производную функции

$$f(x)=x^{\sqrt{3}}-x^{-\sqrt{3}}.$$

2. Найдите приближенное значение $\sqrt[3]{125{,}15}$.

3. Вычислите $\int\limits_0^1 x^{\sqrt{3}}\,dx$.

С—26

1. Докажите, что функция $y=3e^{-2x}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'=-2y$.

2. Найдите такое решение дифференциального уравнения $f'(x)=3f(x)$, что $f(0)=3$.

3. Запишите дифференциальное уравнение гармонического колебания

$$x(t)=3\cos\left(2t-\frac{\pi}{4}\right).$$

С—1

1. Докажите, что функция F есть первообразная для функции f на промежутке $(-\infty;\ \infty)$:

а) $F(x)=x^4-3x^2+7$, $f(x)=4x^3-6x$;

б) $F(x)=\cos(2x-4)+1$, $f(x)=-2\sin(2x-4)$.

2. Найдите одну из первообразных для данной функции на R:

а) $f(x)=-x^4$; б) $f(x)=6{,}4$.

С—2

1. Для функции $f(x)=x^3$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M(1;\ -1)$.

2. Для функции $f(x)=\cos x$ найдите две различные первообразные. Начертите график одной из них.

С—3

Найдите первообразную для функции:

а) $f(x)=3\sin x-2\cos x$;

б) $g(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x}}-x$ на $(0;\ \infty)$.

С—4

1. Запишите формулу, выражающую площадь $S(x)$ трапеции, заштрихованной на рисунке 3, как функцию от x. Вычислив производную, покажите, что $S'(x)=f(x)$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\cos x,\ y=0,\ -\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},$$

используя формулу $S=F(b)-F(a)$.

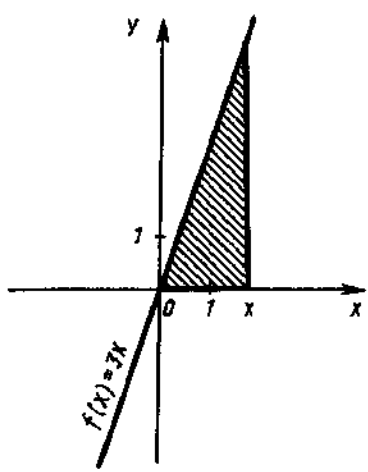

Рис. 3

С—5

Вычислите:

а) $\int\limits_1^3 2dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$.

С—6

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=x^3$, $x=1$, $x=3$, $y=0$;

б) $y=2\cos x$, $y=0$, $0\leqslant x\leqslant \pi$.

С—7

Точка движется по прямой так, что ее скорость в момент времени t равна $v(t)=3+0{,}2t$. Найдите путь, пройденный точкой за время от 1 до 7 с, если скорость измеряется в метрах в секунду.

С—8

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=0{,}5x^2$, $y=x$;

б) $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$, $0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{4}$.

С—9

1. Вычислите:

а) $\int\limits_2^3 (1-x)^4\,dx$; б) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)dx$.

2. Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями

$$y=2x+1,\ x=0,\ x=2,\ y=0.$$

С—10

1. Верно ли равенство $\sqrt{20-6\sqrt{11}}=\sqrt{11}-3$?
2. Найдите значение числового выражения:

а) $\sqrt[6]{(-7)^6}$; б) $\sqrt[3]{9\cdot 375}$.

3. Пользуясь калькулятором или таблицами, найдите приближенное (с точностью до 0,0001) значение корня:

а) $\sqrt{29{,}4}$; б) $\sqrt[3]{33}$.

4. Сравните числа $\sqrt[5]{7}$ и $\sqrt[10]{47}$.

С—11

1. Внесите множитель под знак корня в выражении $b\sqrt{5}$, где $b<0$.
2. Решите уравнение:

а) $x^3+24=0$; б) $(\sqrt[6]{x})^2-3\sqrt[6]{x}=4$.

3. Упростите выражение:

а) $\sqrt{\sqrt{65}-7}\cdot\sqrt{\sqrt{65}+7}$; б) $\sqrt[6]{a^6}-a$, где $a<0$.

С—12

1. Решите уравнение $\sqrt{7-\sqrt{x+1}}=2$.
2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3,\\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5.\end{cases}$$

С—13

1. Найдите значение числового выражения:

а) $27^{-\frac{2}{3}}$; б) $(\sqrt[3]{16})^{\frac{9}{2}}$; в) $\sqrt[3]{12-\sqrt{80}}\cdot(12+80^{0,5})^{\frac{1}{3}}$.

2. Какое из чисел больше: $3^{\frac{5}{8}}$ или $3^{\frac{8}{13}}$?
3. Упростите выражение

$$\frac{8v+1}{4v^{\frac{2}{3}}-2\sqrt[3]{v}+1}.$$

С—14

1. Изобразите схематически график функции $y=2^x$.
2. Вычислите:

а) $3^{(\sqrt{3}-1)^2} : \left(\frac{1}{3}\right)^{2\sqrt{3}}$; б) $((\sqrt{2})^{\sqrt{6}})^{\sqrt{6}}$.

3. Найдите область значений функции

$$f(x)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

С—15

1. Решите уравнение:

а) $0{,}8^{2x-3}=1$; б) $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3}=4{,}5^{x-2}$.

2. Решите неравенство:

а) $2^{2x-9}<1$; б) $0{,}9^x \geqslant 1\frac{19}{81}$.

С—16

1. Решите уравнение:

а) $3^{x+2}+3^x=30$; б) $4^x-14\cdot 2^x-32=0$.

2. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}-6\left(\frac{1}{3}\right)^x-27\leqslant 0.$$

С—17

1. Прологарифмируйте по основанию 2 выражение $16a^6\sqrt[5]{b^3}$.
2. Вычислите без таблиц и калькулятора:

а) $\log_{49} 84-\log_{49} 12$; б) $\frac{\lg 81+\lg 64}{2\lg 3+3\lg 2}$.

3. Найдите $\log_{1,4} 2{,}8$ с помощью таблиц или калькулятора (с точностью до 0,0001).

С—18

1. Сравните числа $\log_3 5$ и $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{4}$.
2. Найдите область определения функции $y=\log_5(2x-1)$.
3. Изобразите схематически график функции $y=\lg(-x)$.

С—19

1. Решите уравнение:

а) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x-1)=-2$; б) $\log_7(4x-6)=\log_7(2x-4)$.

2. Решите неравенство:

а) $\log_3(1-x)>\log_3(3-2x)$; б) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+5)>-3$.

С—20

1. Решите уравнение:

а) $\log^2_{\frac{1}{2}} x-\log_{\frac{1}{2}} x=6$; б) $\frac{1}{3-\lg x}+\frac{2}{\lg x-1}=3$.

2. Решите неравенство:

а) $\lg^2 x+5\lg x+9>0$; б) $(3^x-1)(3^x-2)\leqslant 0$.

С—21

Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x+y=6, \\ \log_2 x+\log_2 y=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2^x+\left(\frac{1}{3}\right)^y=5, \\ 2^{2x}+\left(\frac{1}{3}\right)^{2y}=13. \end{cases}$

С—22

1. Выведите формулу, задающую функцию g, обратную к данной функции f. Найдите области определения и значений функции g:

а) $f(x)=3-4x$;

б) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$, $x\geqslant 2$.

2. По заданному графику функции f найдите значения обратной к ней функции g в точках -1; 1 (рис. 4). Постройте график функции g, найдите ее область определения и область значений.

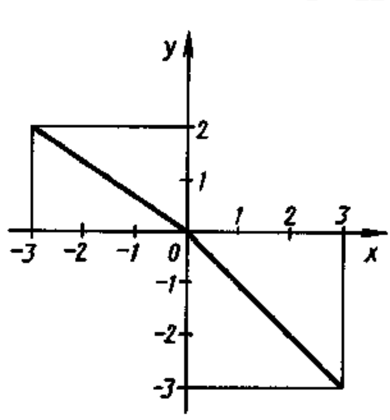

Рис. 4

С—23

1. Найдите производную функции:

а) $f(x)=e^{-0,3x}$; б) $f(x)=x\cdot 3^x$.

2. Напишите уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0, если $f(x)=e^x$, $x_0=-1$.

3. Найдите промежутки возрастания и убывания функции

$$f(x)=x\cdot e^{-3x}.$$

4. Вычислите $\int\limits_2^4 e^{-x}dx$.

С—24

1. Найдите производную функции:

а) $f(x)=\ln(3x-4)$; б) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(3x^2-2x+5)$.

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=0,\ y=\frac{1}{x},\ x=2,\ x=4.$$

3. Найдите максимумы и минимумы функции

$$f(x)=x^3\ln x.$$

С—25

1. Найдите производную функции

$$f(x)=x^{\sqrt{2}}+x^{-\sqrt{2}}.$$

2. Вычислите приближенное значение $\sqrt[4]{16,08}$.

3. Вычислите $\int\limits_0^1 x^{\sqrt{5}}dx$.

С—26

1. Докажите, что функция $y=5e^{-3x}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'=-3y$.

2. Найдите такое решение дифференциального уравнения $f'(x)=4f(x)$, что $f(0)=5$.

3. Запишите дифференциальное уравнение гармонического колебания

$$x(t)=0,7\cos\left(0,5t+\frac{\pi}{8}\right).$$

С—1

1. Докажите, что функция F есть первообразная для функции f на указанном промежутке:

а) $F(x)=\frac{3}{x^2}+1$, $f(x)=-\frac{6}{x^3}$, $x\in(-\infty;\ 0)$;

б) $F(x)=6x^{-1,5}\cdot\sqrt{x}$, $f(x)=-\frac{6}{x^2}$, $x\in(0;\ \infty)$.

2. Является ли функция F первообразной для функции f на указанном промежутке:

а) $F(x)=2x+\operatorname{tg} x$, $f(x)=2+\frac{1}{\cos^2 x}$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$;

б) $F(x)=\frac{10}{x}$, $f(x)=-\frac{10}{x^2}$, $x\in(-3;\ 3)$?

С—2

1. Для функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ найдите две различные первообразные.

2. Для функции $f(x)=\sin x$ найдите первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку $A\left(\frac{\pi}{2};\ -1\right)$. Начертите график функции $F(x)$.

С—3

1. Для функции $f(x)=2x-2$ найдите первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку $A\,(2;\ 1)$. Начертите график функции $F(x)$.

2. Для функции $f(x)=(\sqrt{2x+1})^{-1}-\sin\frac{x}{4}$ найдите общий вид первообразных на промежутке $(-0,5;\ \infty)$.

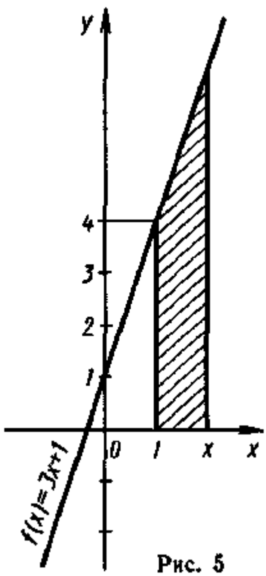

Рис. 5

С—4

1. Запишите формулу, выражающую площадь $S(x)$ трапеции, заштрихованной на рисунке 5, как функцию от x. Вычислив производную, покажите, что $S'(x)=f(x)$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=2\cos x,\ y=0,\ \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2},$$

используя формулу $S=F(b)-F(a)$.

С—5

Вычислите:

а) $\int\limits_1^4 \frac{5\sqrt{x}}{x}\,dx$; б) $\int\limits_1^4 (x^2-6x+9)\,dx$; в) $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{6}{\cos^2 2x}\,dx$.

С—6

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=x^2$, $y=-x^2+2$; б) $y=\begin{cases} 2\cos x, \text{ если } -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 0, \\ -x+2, \text{ если } 0<x\leqslant 2 \end{cases}$ и $y=0$.

С—7

Начертите трапецию, ограниченную линиями $y=x$, $y=0$, $x=1$, $x=2$.

а) Вычислите площадь этой трапеции по известной из курса геометрии формуле.

б) Вычислите приближенно площадь этой трапеции, разделив отрезок [1; 2] на 10 равных частей и построив вписанную ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников. Найдите абсолютную погрешность полученного значения.

в) Выведите формулу площади S_n вписанной ступенчатой фигуры, разделив отрезок [1; 2] на n равных частей. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

С—8

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=3\sin x,\ y=-2\sin x,\ 0\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$;

б) $y=-x^2+2,\ y=-x$.

С—9

1. Вычислите:

а) $\int\limits_{-1}^{0}(1-2x)^4\,dx$; б) $\int\limits_{0}^{\pi}\frac{3}{\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}\,dx$.

2. Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x},\ y=1,\ x=2$.

С—10

1. Упростите выражение:

а) $\sqrt[4]{(2-\sqrt{7})^4}-\sqrt{7}$; б) $\sqrt[4]{a^4}+\sqrt[3]{a^3}$, если $a<0$.

2. Решите уравнение:

а) $x^4-1=0$; б) $125x^3+1=0$.

С—11

1. Упростите выражение

$$\sqrt[5]{10+2\sqrt{17}}\cdot\sqrt[5]{10-2\sqrt{17}}.$$

2. Представьте в виде дроби, знаменатель которой не содержит знака корня, выражение

$$\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}.$$

3. Решите неравенство $x^4>16$.

С—12

1. Решите уравнение $\sqrt{2x^2-3x+2}=4-x$.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5,\\ x+y+4\sqrt{xy}=37.\end{cases}$$

С—13

1. Какое из чисел больше: $\sqrt[3]{\sqrt{27}}$ или $\sqrt[4]{4}$?

2. Найдите значение выражения $81^{\frac{3}{4}}+(0{,}25)^{-2}$.

3. Упростите выражение

$$\left(\frac{x^2+y^2}{xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}}-\frac{x+y}{y^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}}\right)xy^{-1}.$$

С—14

а) Начертите график функции $y=2^x-1$; назовите область значений функции; выделите на рисунке часть графика, для которой $-\frac{1}{2}<y<3$, и найдите соответствующие значения x.

б) Начертите график функции $y=|2^x-1|$ и выпишите наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке $[-2;\ 4]$.

С—15

1. Решите уравнение:

а) $9^{-x}=27$; б) $\frac{1}{8}\sqrt{2^{x-1}}=4^{-1{,}25}$.

2. Решите неравенство:

а) $\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^{x-0{,}5}>\sqrt{2}$; б) $4^{0{,}5x^2-3}>8$.

С—16

1. Решите неравенство $9^{|x+1|}>3$.

2. Решите уравнение:

а) $5^{x+1}-3\cdot5^{x-2}=122$; б) $9^x-2\cdot3^x=63$.

С—17

1. Вычислите без таблиц и калькулятора

$$2\lg 5+\frac{1}{2}\lg 16.$$

2. Найдите x, если

$$\log_5 x=2\log_5 3+\frac{1}{2}\log_5 49-\frac{1}{3}\log_5 27.$$

3. Прологарифмируйте по основанию 10 выражение

$$x=\frac{\sqrt{10a\sqrt[3]{10}}}{10a},\ a>0.$$

С—18

а) Начертите график функции $y=\log_2 x-1$; выделите на рисунке часть графика, для которой $-2<y<2$, и найдите соответствующие значения x.

б) Начертите график функции $y=|\log_2 x-1|$ и выпишите наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке $[0{,}5;\ 8]$.

С—19

1. Решите уравнение:

а) $\log_4 \frac{1}{x^2}+\log_4 \sqrt{x}=-3$; б) $\lg 10x\cdot\lg 0{,}1x=3$.

2. Решите неравенство:

а) $\lg 2x<\lg(x+1)$; б) $\log_2(1-x)<1$.

С—20

1. Решите уравнение

$$\log_{0,5}(2x-3)-\frac{1}{2}\log_{0,5}(2x+3)=0.$$

2. Решите неравенство:

а) $\log_{0,1}^2 x\geqslant 1$; б) $(\log_3 x-2)\sqrt{x^2-4}\leqslant 0$.

С—21

Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}\log_3 x-\log_3 y=1,\\ x-2y=9;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\log_3(y-x)=1,\\ 3^{x+1}\cdot 2^y=24.\end{cases}$

С—22

Для данной функции найдите обратную и постройте графики данной и обратной к ней функций в одной и той же системе координат:

а) $y=-\frac{1}{3}x+2$; б) $y=x^2-1$, где $x\geqslant 0$.

С—23

1. Дана функция $f(x)=e^{-2x}\cos 3x$. Найдите $f'(x)$, $f'(0)$.

2. Вычислите $\int\limits_{-1}^{3} 3^x dx$.

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=e^x,\ y=1,\ x=2.$$

С—24

1. Дана функция $f(x)=10\ln\frac{1}{5}x$. Найдите $f'(x)$, $f'\left(\frac{5}{3}\right)$.

2. Найдите промежутки возрастания и убывания функции

$$\varphi(x)=\ln x-x.$$

3. Найдите (с точностью до 0,01) площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\frac{4}{x},\ x=1,\ y=1.$$

С—25

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=x^{\frac{1}{3}},\ y=0,\ x=1,\ x=8.$$

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^{-2}$ в точке его с абсциссой $x_0=-1$. Выполните рисунок к задаче.

С—26

1. Докажите, что функция $y=3e^{-4x}$ удовлетворяет уравнению $y'=-4y$.

2. Запишите общий вид решения дифференциального уравнения $y'=-2y$. Найдите решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $y(0)=e$.

С—1

1. Докажите, что функция F есть первообразная для функции f на указанном промежутке:

а) $F(x)=\frac{6}{x^2}-3$, $f(x)=-\frac{12}{x^3}$, $x\in(-\infty;\ 0)$;

б) $F(x)=4x^{-1,5}\cdot\sqrt{x^{-1}}$, $f(x)=-\frac{8}{x^3}$, $x\in(0;\ \infty)$.

2. Является ли функция F первообразной для функции f на указанном промежутке:

а) $F(x)=3x-\operatorname{ctg} x$, $f(x)=3+\frac{1}{\sin^2 x}$, $x\in(0;\ \pi)$;

б) $F(x)=\frac{15}{x}$, $f(x)=-\frac{15}{x^2}$, $x\in(-4;\ 4)$?

С—2

1. Для функции $f(x)=x^{-3}$ найдите две различные первообразные.

2. Для функции $f(x)=\cos x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $A(\pi;\ 1)$. Начертите этот график.

С—3

1. Для функции $f(x)=2x+4$ найдите первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку $B(-1;\ 1)$. Начертите график функции $F(x)$.

2. Для функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3x-1}}+\cos\frac{x}{2}$ найдите общий вид первообразных на промежутке $\left(\frac{1}{3};\ \infty\right)$.

С—4

1. Запишите формулу, выражающую площадь $S(x)$ трапеции, заштрихованной на рисунке 6, как функцию от x. Вычислив производную, покажите, что $S'(x)=f(x)$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2\sin x$, $y=0$, $\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$, используя формулу

$$S=F(b)-F(a).$$

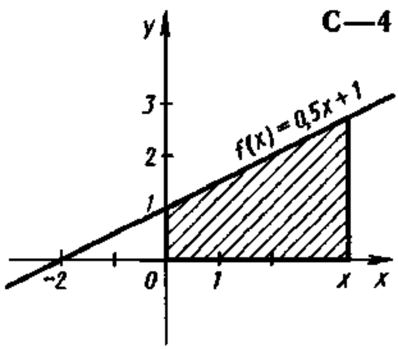

Рис. 6

С—5

Вычислите:

а) $\int\limits_{1}^{9} \frac{4x}{x^{1,5}}\,dx$; б) $\int\limits_{-5}^{1} (x^2+8x+16)\,dx$; в) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{8}{\sin^2 2x}\,dx$.

С—6

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=2x^2$ и $y=-2x^2+4$;

б) $y=\begin{cases} x+2, \text{ если } -2\leqslant x\leqslant 0, \\ 2\cos x, \text{ если } 0<x\leqslant\frac{\pi}{2} \end{cases}$ и $y=0$.

С—7

Начертите трапецию, ограниченную линиями

$$y=0,5x,\ y=0,\ x=1,\ x=2.$$

а) Вычислите площадь этой трапеции по известной из курса геометрии формуле.

б) Вычислите приближенно площадь этой трапеции, разделив отрезок [1; 2] на 10 равных частей и построив вписанную ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников. Найдите абсолютную погрешность полученного значения.

в) Выведите формулу площади S_n вписанной ступенчатой фигуры, разделив отрезок [1; 2] на n равных частей. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

С—8

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=\cos x,\ y=-2\cos x,\ -\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$;

б) $y=-x^2+3,\ y=2x$.

С—9

1. Вычислите:

а) $\int\limits_0^1 (3-4x)^4\,dx$; б) $\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{4}{\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\,dx$.

2. Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями

$$y=x^2+1,\ y=1,\ x=1.$$

С—10

1. Упростите выражение:

а) $\sqrt[6]{(3-\sqrt{10})^6}+\sqrt{10}$; б) $\sqrt[5]{a^5}-\sqrt[6]{a^6}$, если $a<0$.

2. Решите уравнение:

а) $x^6-1=0$; б) $27x^3-1=0$.

С—11

1. Упростите выражение

$$\sqrt[3]{12+4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{12-4\sqrt{5}}.$$

2. Представьте в виде дроби, знаменатель которой не содержит знака корня, выражение $\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}$.

3. Решите неравенство $x^6<1$.

С—12

1. Решите уравнение $\sqrt{3x^2+6x+1}=7-x$.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=4, \\ x+y-3\sqrt{xy}=1. \end{cases}$$

С—13

1. Какое из чисел больше: $\sqrt[5]{\sqrt{32}}$ или $\sqrt[6]{8}$?

2. Найдите значение выражения

$$3\cdot 0{,}0081^{-0{,}25}+\left(\frac{1}{16}\right)^{-0{,}75}.$$

3. Упростите выражение

$$\left(\frac{a^2-b^2}{a^{\frac{3}{2}}+ab^{\frac{1}{2}}}-\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}\right):\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}.$$

С—14

а) Начертите график функции $y=3^x-1$; назовите область значений функции; выделите на рисунке часть графика, для которой $-\frac{2}{3}<y<2$, и найдите соответствующие значения x.

б) Начертите график функции $y=|3^x-1|$ и выпишите наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке $[-2; 2]$.

С—15

1. Решите уравнение:

а) $8^{-x}=16$; б) $10^{2x}=0{,}1\cdot\sqrt{1000}$.

2. Решите неравенство:

а) $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)^{x-1}<9^{-0{,}5}$; б) $9^{0{,}5x^2-3}<27$.

С—16

1. Решите неравенство $4^{|x-1|}<8$.

2. Решите уравнение:

а) $3^{x-1}-4\cdot3^{x-2}=69$; б) $4^x-3\cdot2^x=40$.

С—17

1. Вычислите без таблиц и калькулятора

$$3\lg5+\frac{1}{2}\lg64.$$

2. Найдите x, если

$$\log_7 x=2\log_7 5+\frac{1}{2}\log_7 36-\frac{1}{3}\log_7 125.$$

3. Прологарифмируйте по основанию 10 выражение

$$x=\frac{\sqrt[3]{10a\sqrt{10}}}{100a},\ a>0.$$

С—18

а) Начертите график функции $y=\log_2(x-1)$; выделите на рисунке часть графика, для которой $-1<y<2$, и найдите соответствующие значения x.

б) Начертите график функции $y=|\log_2(x-1)|$ и выпишите наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке $[1{,}5;\ 9]$.

С—19

1. Решите уравнение:

а) $\log_{0,5}\frac{1}{x}+4\log_{0,5}\sqrt[3]{x}=-1$; б) $\lg 100x\cdot\lg 0{,}01x=5$.

2. Решите неравенство:

а) $\lg(3x)<\lg(x+4)$; б) $\log_{0,5}(1-x)>-1$.

С—20

1. Решите уравнение

$$\frac{1}{2}\log_3(5x-1)-\log_3(x+1)=0.$$

2. Решите неравенство:

а) $\log^2_{0,2}x\leqslant 1$; б) $(2-\log_2 x)\sqrt{x^2-1}\geqslant 0$.

С—21

Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}\log_4 x-\log_4 y=1,\\ x-3y=16;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\log_2(x-y)=1,\\ 2^x\cdot 3^{y+1}=72.\end{cases}$

С—22

Для данной функции найдите обратную и постройте графики данной и обратной к ней функций в одной и той же системе координат:

а) $y=-0{,}5x+2$; б) $y=x^2-2$, где $x\geqslant 0$.

С—23

1. Дана функция $f(x)=e^{-x}\sin 2x$. Найдите $f'(x)$, $f'(0)$.

2. Вычислите $\int\limits_{-1}^{2}5^x dx$.

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=e^{-x},\ y=1,\ x=-2.$$

С—24

1. Дана функция $f(x)=\frac{1}{8}\ln(-4x)$. Найдите $f'(x)$, $f'\left(-\frac{3}{4}\right)$.

2. Найдите промежутки возрастания и убывания функции

$$\varphi(x)=x-\ln x.$$

3. Вычислите (с точностью до 0,01) площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{2}{x}$, $x=1$, $y=\frac{1}{2}$.

С—25

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=2x^{\frac{1}{3}},\ y=0,\ x=1,\ x=8.$$

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^{-3}$ в точке его с абсциссой $x_0=1$. Выполните рисунок к задаче.

С—26

1. Докажите, что функция $y=8e^{-2x}$ удовлетворяет уравнению $y'=-2y$.

2. Запишите общий вид решения дифференциального уравнения $y'=-4y$ и найдите решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $y(1)=e$.

С—1

1. Докажите, что функция F есть первообразная для функции f на промежутке $(-\infty;\ 0)$:

а) $F(x)=\sqrt{-x}$, $f(x)=-\frac{1}{2\sqrt{-x}}$;

б) $F(x)=\sin^2 x+1$, $f(x)=\sin 2x$.

2. Является ли функция F первообразной для функции f на промежутке $(-\infty;\ \infty)$:

а) $F(x)=3x^2+\cos x+3$, $f(x)=6x-\sin x$;

б) $F(x)=-\frac{1}{x^2}$, $f(x)=\frac{1}{x}$?

С—2

1. Для функции $f(x)=-x+1$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M(-2;\ -3)$. Начертите этот график.

2. Найдите общий вид первообразных для функции:

а) $f(x)=\sqrt{7x+1}$; б) $f(x)=\sin 3x-\frac{1}{\cos^2 x}$.

С—3

Найдите первообразную для функции:

а) $f(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\cos\frac{x}{3}$; б) $f(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x\sqrt{x}}$.

С—4

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=1-x^2$, $y=0$;

б) $y=\sin 2x$, $y=0$, $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$.

С—5

Вычислите:

а) $\int\limits_1^4 \frac{x}{\sqrt{x}}\,dx$; б) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \cos x\,dx$; в) $\int\limits_0^2 (x^7-2x)\,dx$.

С—6

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=2-x^2$, $y=x$, $x=0$, $x\geqslant 0$;

б) $y=\frac{1}{\cos^2 x}$, $y=8\cos x$, $x=0$, $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$.

С—7

Точка движется по прямой так, что ее скорость в момент t равна $v(t)=2t-\sin\pi t$. Найдите путь, пройденный точкой за время от 2 до 6.

С—8

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\begin{cases}4-\frac{2}{\cos^2 x} \text{ при } 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}, \\ 2+x \text{ при } -2\leqslant x<0\end{cases} \text{ и } y=0.$$

2. Вычислите $\int\limits_0^2\left(\left(1-\frac{x}{2}\right)^4+\sin\frac{\pi x}{2}\right)dx$.

С—9

1. Найдите объем тела, полученного при вращении криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $x=4$, $y=0$, вокруг:

а) оси Ox; б) оси Oy.

2. Сила в 2 Н растягивает пружину на 6 см. Какую работу нужно произвести, чтобы растянуть эту пружину на 10 см?

С—10

1. Верно ли равенство $\sqrt{99-10\sqrt{2}}=7-5\sqrt{2}$?

2. Найдите значение числового выражения:

а) $\sqrt[3]{2\sqrt[5]{2}}\cdot\sqrt[5]{8}$; б) $\left(\sqrt{3^3}+\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^3}\right):\left(\sqrt{3}+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$.

3. Пользуясь калькулятором или таблицами, найдите приближенное значение числового выражения:

а) $\sqrt[3]{10{,}731}$; б) $\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}$.

4. Какое из чисел больше: $\sqrt{2}$ или $\sqrt[5]{\sqrt{31}}$?

С—11

1. Вынесите множитель из-под знака корня в выражении $\sqrt[4]{2a^4}$, где $a<0$.

2. Решите уравнение:

а) $x^6-3x^3-10=0$; б) $\sqrt{x}+3\sqrt[4]{x}-4=0$.

3. Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{7-\sqrt{22}}\cdot\sqrt[3]{7+\sqrt{22}}$; б) $\sqrt[3]{a^3}+\sqrt{a^2}$.

С—12

1. Решите уравнение

$$\sqrt{4+x}\cdot\sqrt{5-x}=2\sqrt{2}.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}=1,\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=7.\end{cases}$$

С—13

1. Найдите значение числового выражения:

а) $\left(27^{\frac{2}{3}}+125^{\frac{1}{3}}+8^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{4}}$; б) $\left(10+73^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}:(10-\sqrt{73})^{\frac{1}{3}}$.

2. Сравните числа $\left(\sqrt[4]{5}\right)^{-\frac{5}{3}}$ и $\sqrt[4]{5^{-1}:\sqrt[3]{25}}$.

3. Упростите выражение

$$\frac{u+8}{u^{\frac{2}{3}}-2\sqrt[3]{u}+4}-\frac{u-8}{\sqrt[3]{u^2}+2u^{\frac{1}{3}}+4}.$$

С—14

1. Изобразите схематически график функции $y=5^{1-x}$.

2. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{5^{(\sqrt{5}+1)^2}\cdot 25^{-\sqrt{5}}}$; б) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$.

3. Найдите области определения и значений функции $y=\sqrt{3^x-9}$.

С—15

1. Решите уравнение:

а) $2^x+2^{x-3}=18$; б) $\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)^{2x-2}=1\frac{7}{9}$.

2. Решите неравенство:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}>5$; б) $3^{|x|-2}<27$.

С—16

1. Решите уравнение:

а) $8^{|x^2-1|}=16$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x+3^{x+3}=12$.

2. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x-2^{1-x}-8<0.$$

С—17

1. Вычислите без таблиц и калькулятора:

а) $\log_{\sqrt{2}}12-\log_2 9$; б) $\left(\frac{\lg 125-2\lg 2}{\lg\sqrt[3]{4}+\lg 0{,}2}\right)^2$.

2. Прологарифмируйте по основанию 2 выражение

$$\frac{\sqrt{8}\,a\sqrt[12]{bc^3}}{9\sqrt{x}\,y^2},\ a>0,\ b>0.$$

3. Сравните числа:

а) $3^{\log_7 11}$ и $11^{\log_7 3}$; б) $\log_2 3+\log_3 2$ и 2.

С—18

1. Определите знак числа:

а) $\log_2\frac{1}{51}$; б) $\log_{0,5}0{,}75$.

2. Найдите область определения функции $y=\frac{1-x}{\log_3(x^2-9)}$.

3. Изобразите схематически график функции $y=\log_{0,4}(-x)$.

С—19

1. Решите уравнение:

а) $\log_{\sqrt{3}}(x^2-5x-3)=2$; б) $\lg(x-1)=0{,}5\lg(1+1{,}5x)$.

2. Решите неравенство:

а) $\log_2(2x-1)>\log_2(3x-4)$; б) $\frac{x+2}{\lg x}\geqslant 0$.

С—20

1. Решите уравнение:

а) $2\log^2_{\frac{1}{3}} x - 5\log_3 x = 7$; б) $\frac{3}{\lg x - 2} + \frac{2}{\lg x - 3} = -4$.

2. Решите неравенство:

а) $\lg^2 x^2 + 3\lg x > 1$; б) $7^{2x} - 3\cdot 7^x > 10$.

С—21

Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \log_2(x+y)=3, \\ \log_{15} x = 1 - \log_{15} y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2^{\cos x} + 4^{\sin y} = 3, \\ 2^{\cos x}\cdot 4^{\sin y} = 2. \end{cases}$

С—22

1. Выведите формулу, задающую функцию g, обратную к данной функции f. Найдите области определения и значений функции g:

а) $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$;

б) $f(x)=\sqrt{3-x^2}$, $x \leqslant 0$.

2. По заданному графику функции f найдите значения обратной к ней функции g в точках -2; 0; 1 (рис. 7). Постройте график функции g, найдите ее область определения и область значений.

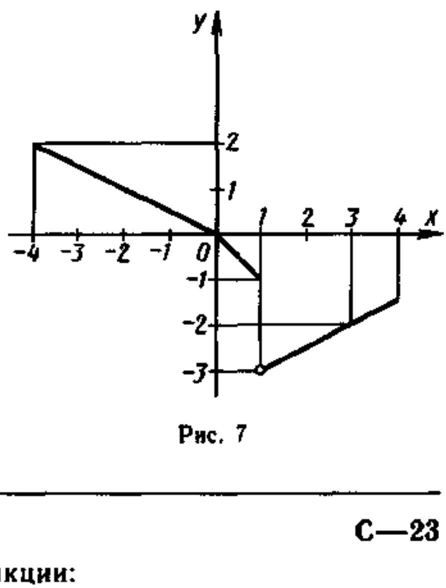

Рис. 7

С—23

1. Найдите производную функции:

а) $f(x)=0{,}2^{7+0{,}1x}$; б) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+\frac{1}{2}}$.

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=e^{1-x}$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

3. Найдите промежутки возрастания и убывания функции

$$f(x)=(x-1)e^{x+1}.$$

4. Вычислите $\int_0^1 (2^{3x-1}\ln 2)\,dx$.

С—24

1. Найдите производную функции:

а) $f(x)=\ln(1-0{,}2x)$; б) $f(x)=\log_3(x^2-2\sqrt{x})$.

2. Напишите уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой $x_0=1$, если $f(x)=\log_2(x+3)$.

3. Найдите промежутки возрастания и убывания функции

$$f(x)=x^2\log_2 x.$$

С—25

1. Найдите производную функции $f(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{-\sqrt{2}}+x^{-2}$.

2. Вычислите приближенное значение $\sqrt[3]{125{,}15}-\sqrt[3]{124{,}85}$.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=0,\ y=x^{\pi},\ x=1,\ x=\pi.$$

С—26

1. Запишите дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $f(x)=e^{-3x}$.

2. Найдите решение дифференциального уравнения $f'(x)=$ $=f(x)\ln 4$, такое, что $f(1)=2$.

3. Запишите общий вид решений дифференциального уравнения

$$y''=-\frac{1}{9}y.$$

С—1

1. Докажите, что функция F есть первообразная для функции f на промежутке $(0; \infty)$:

а) $F(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x^3}-2$, $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{3}{2}\sqrt{x}$;

б) $F(x)=3-\cos^2 x$, $f(x)=\sin 2x$.

2. Является ли функция F первообразной для функции f на промежутке $(-\infty; \infty)$:

а) $F(x)=x^2+\sin x+5$, $f(x)=2x+\cos x$;

б) $F(x)=-\frac{2}{x^3}$, $f(x)=\frac{1}{x^2}$?

С—2

1. Для функции $h(x)=1-4x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M(-1; 9)$. Найдите этот график.

2. Найдите общий вид первообразных для функции:

а) $f(x)=\sqrt{6x-2}$; б) $f(x)=\cos 3x+\frac{1}{\sin^2 x}$.

С—3

Найдите первообразную для функции:

а) $f(x)=\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$; б) $f(x)=\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x\sqrt{x}}$.

С—4

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=x^3$, $x=-1$, $y=0$;

б) $y=\cos 0{,}5x$, $y=0$, $x=-\frac{\pi}{3}$, где $-\pi\leqslant x\leqslant-\frac{\pi}{3}$.

С—5

Вычислите:

а) $\int\limits_1^4 \frac{\sqrt{x}}{x}\,dx$; б) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin x\,dx$; в) $\int\limits_{-2}^{0} (x^5-3x^2)\,dx$.

С—6

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=x$, $y=2-x^2$, $y=0$, $x\geqslant 0$;

б) $y=\frac{1}{\cos^2 x}$, $y=8\cos x$, $y=0$, $x=0$, $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$.

С—7

Точка движется по прямой так, что ее скорость в момент t равна $v(t)=\sqrt{t}+\cos\pi t$. Найдите координату точки в момент t, если ее координата в момент $t=0$ равна 3.

С—8

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\begin{cases}-2+\frac{1}{\sin^2 x} \text{ при } \frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4},\\ \frac{12x}{\pi} \text{ при } 0\leqslant x<\frac{\pi}{6}\end{cases} \quad \text{и } y=0.$$

2. Вычислите $\int\limits_1^0\left(\frac{(4x+1)^3}{3}+\cos\pi x\right)dx$.

С—9

1. Найдите объем тела, полученного при вращении криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=x^2$, $x=2$, $y=0$, вокруг:

а) оси Ox; б) оси Oy.

2. Сила в 4 Н сжимает пружину на 4 см. Какую работу нужно произвести, чтобы сжать эту пружину на 2 см?

С—10

1. Верно ли равенство $8-4\sqrt{3}=\sqrt{112-64\sqrt{3}}$?

2. Найдите значение числового выражения:

а) $\sqrt[6]{3\sqrt[7]{3^5}}:\sqrt[7]{9}$; б) $\left(\sqrt{5^3}-\sqrt{\frac{1}{5^3}}\right):\left(\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

3. Пользуясь калькулятором или таблицами, найдите приближенное значение числового выражения:

а) $\sqrt[3]{20{,}39}$; б) $\sqrt[3]{3}+\sqrt[4]{3}$.

4. Какое из чисел больше: $\sqrt{3}$ или $\sqrt[3]{\sqrt{28}}$?

С—11

1. Вынесите множитель из-под знака корня в выражении $\sqrt[6]{4b^6}$, где $b<0$.

2. Решите уравнение:

а) $x^6-2x^3-15=0$; б) $\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}=5$.

3. Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{9-\sqrt{17}}\cdot\sqrt[3]{9+\sqrt{17}}$; б) $\sqrt[5]{a^5}+\sqrt[4]{a^4}$.

С—12

1. Решите уравнение

$$\sqrt{8+x}\cdot\sqrt{8-x}=x.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}=3,\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=9.\end{cases}$$

С—13

1. Найдите значение числового выражения:

а) $\left(8^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}+\sqrt{125^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}$;

б) $\left(12-19^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}:\left(12+19^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

2. Какое из чисел больше: $(\sqrt[3]{9})^{-\frac{5}{4}}$ или $\sqrt{\frac{1}{3}\cdot 9^{-\frac{2}{3}}}$?

3. Упростите выражение

$$\frac{8v+1}{4v^{\frac{2}{3}}-2\sqrt[3]{v}+1}-\frac{8v-1}{4\sqrt[3]{v^2}+2v^{\frac{1}{3}}+1}.$$

С—14

1. Изобразите схематически график функции $y=0{,}2^{1-x}$.

2. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{3^{(\sqrt{3}+1)^2}\cdot 9^{-\sqrt{3}}}$; б) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$.

3. Найдите области определения и значений функции

$$y=\sqrt{2^x-4}.$$

С—15

1. Решите уравнение:

а) $3^x+4\cdot 3^{x+1}=13$; б) $\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)^{3x-4}=\sqrt{8}$.

2. Решите неравенство:

а) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}+\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}\leqslant 26$; б) $3^{x^2}>9^8$.

С—16

1. Решите уравнение:

а) $27^{|x^2-2|}=81$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2+3x-1}=4^{x-3}$.

2. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{9}\right)^x-3^{1-x}+6<0.$$

С—17

1. Вычислите без таблиц и калькулятора:

а) $\log_{\sqrt{3}}\sqrt{18}-\log_3 4$; б) $\left(\frac{\log_6 27+2\log_6 2}{\log_6\sqrt[3]{0{,}25}+\log_6\frac{1}{3}}\right)^3$.

2. Прологарифмируйте по основанию 5 выражение

$$\frac{125a^2\sqrt[3]{bx^5}}{3\sqrt{y}\,z^3},\ b>0,\ x>0,\ z>0.$$

3. Сравните числа:

а) $7^{\log_3 11}$ и $11^{\log_3 7}$; б) $\log_2 5+\log_5 3$ и 4.

С—18

1. Определите знак числа:

а) $\log_3 4$; б) $\log_{\frac{1}{3}} 0{,}9$.

2. Найдите область определения функции

$$y=\frac{x}{\log_2(x^2-4)}.$$

3. Изобразите схематически график функции $y=\lg|x|$.

С—19

1. Решите уравнение:

а) $\log_{\sqrt{2}}(x^2-3x)=4$; б) $\lg(2x+1)=0{,}5\lg(1-3x)$.

2. Решите неравенство:

а) $3\log^2_{\frac{1}{2}}x-2\log_2 x\leqslant 5$; б) $\frac{x}{\lg(x+1)}\geqslant 0$.

С—20

1. Решите уравнение:

а) $3\log^2_{\frac{1}{2}}x+2\log_2 x=5$; б) $\frac{2}{\lg x+1}+\frac{3}{\lg x+2}=2$.

2. Решите неравенство:

а) $\lg^2 x-2\lg x>2$; б) $15^{2x}+3\cdot 15^x>10$.

С—21

Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}\log_3 x+\log_3 y=2+\log_3 2,\\ \log_3(x+y)=2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}4^{\cos x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin y}=3,\\ 4^{\cos x}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin y}=2.\end{cases}$

С—22

1. Выведите формулу, задающую функцию g, обратную к данной функции f. Найдите области определения и значений функции g:

а) $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$;

б) $f(x)=\sqrt{2-x^2}$, $x\leqslant 0$.

2. По заданному графику функции f найдите значения обратной к ней функции g в точках -1; 1; 3 (рис. 8). Постройте график функции g, найдите ее области определения и значений.

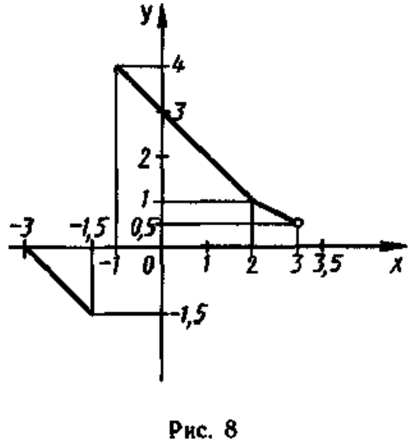

Рис. 8

1. Найдите производную функции: **С—23**

а) $f(x)=3e^{3+2x}$; б) $f(x)=14^{0,2-5x}$.

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=e^{1+x}$ в точке с абсциссой $x_0=-1$.

3. Найдите промежутки возрастания и убывания функции

$$f(x)=(x+1)\,e^{x-1}.$$

4. Вычислите

$$\int_{-1}^{1}(3^{3x+1}\ln 3)\,dx.$$

---

1. Найдите производную функции: **С—24**

а) $f(x)=\ln\left(2-\frac{1}{3}x\right)$; б) $f(x)=\log_4\left(x^3-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$.

2. Напишите уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой $x_0=1$, если $f(x)=\log_3(2x+1)$.

3. Найдите промежутки возрастания и убывания функции

$$f(x)=\lg^2(x+1)-\lg(x+1).$$

---

1. Найдите производную функции **С—25**

$$f(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{-\sqrt{3}}+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{3}.$$

2. Вычислите приближенное значение выражения

$$\sqrt[4]{16{,}08}-\sqrt[5]{32{,}15}.$$

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=0,\ y=x^e,\ x=1,\ x=e.$$

С—26

1. Запишите дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $f(x)=e^{-0,4x}$.

2. Найдите решение дифференциального уравнения $f'(x)=f(x)\ln 3$, такое, что $f(1)=9$.

3. Запишите общий вид решений дифференциального уравнения

$$y''=-\frac{1}{4}y.$$

С—1

1. Является ли функция F первообразной для функции f на промежутке I:

а) $F(x)=\sqrt{x-1}+2,\quad f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}},\quad I=(1;\ \infty)$;

б) $F(x)=3x^2-1,\quad f(x)=x^3-x,\quad I=(-\infty;\ \infty)$?

2. Докажите, что функция F есть первообразная для функции f на промежутке I:

а) $F(x)=2-\sin^2 x+\cos^2 x,\ f(x)=-2\sin 2x,\quad I=(0;\ 2)$;

б) $F(x)=(x-1)^4,\ f(x)=4x^3-12x^2+12x-1,\ I=(-\infty;\ \infty)$.

С—2

1. Для функции $h(x)=\sin x$ найдите первообразную $H(x)$, такую, что $H\left(\frac{\pi}{3}\right)=2$. Начертите график этой первообразной.

2. Найдите общий вид первообразных для функции:

а) $f(x)=\frac{6x-2}{\sqrt{6x-1}+1}$; б) $f(x)=\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x$.

С—3

Найдите первообразную для функции:

а) $f(x)=\sin(1{,}5x-1)+\sqrt{x}$; б) $g(x)=\frac{1}{3\cos^2(7-x)}+\frac{x^2}{2}$.

С—4

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=0,\ y=2x,\ y=3-x^2,\ x\geqslant 0$;

б) $y=|\sin x|,\ y=0,\ x=\frac{4\pi}{3},\ \pi\leqslant x\leqslant\frac{4\pi}{3}$.

С—5

Вычислите:

а) $\int\limits_1^9 5\sqrt{x}\,dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos^2 x}$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx$.

С—6

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=x^2$, $y=4x-3$; б) $y=\cos 2x$, $y=\sin x$, $y=0$, $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$.

С—7

Точка движется по прямой так, что ее скорость в момент времени t равна $v(t)=10t-0{,}008t^3$. Найдите путь, пройденный точкой за промежуток от $t=10$ с до $t=20$ с, и ее ускорение в конце пути, если скорость измеряется в метрах в секунду.

С—8

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\begin{cases}1-|x| \text{ при } -1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}, \\ \cos\frac{2\pi x}{3} \text{ при } \frac{1}{2}<x\leqslant\frac{3}{4}\end{cases} \quad \text{и } y=0.$$

2. Вычислите $\int\limits_{\sqrt{5}}^{\sqrt{10}}\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx.$

С—9

1. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1+z^2,\ z=1,\ z=0.$$

2. Найдите силу давления воды на одну сторону вертикальной стенки, имеющей форму трапеции, нижнее основание которой $a=10$ м, верхнее основание $b=6$ м и высота $h=5$ м, если уровень погружения нижнего основания $c=10$ м.

С—10

1. Верно ли равенство $\sqrt{52-30\sqrt{3}}=5-3\sqrt{3}$?

2. Найдите значение числового выражения:

а) $\sqrt[3]{3\sqrt[5]{\sqrt{3}}}\cdot\sqrt[5]{27}$; б) $\left(\sqrt{2^3}-\sqrt{\frac{1}{2^3}}\right):\left(\sqrt{2}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

3. Пользуясь калькулятором или таблицами, найдите приближенное значение числового выражения (с точностью до 0,0001):

а) $\sqrt[3]{20{,}991}$; б) $\sqrt[3]{5}+\sqrt[4]{5}$.

4. Сравните числа $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$ и $\sqrt[5]{\sqrt{3}}$.

С—11

1. При каких a справедливо неравенство $\sqrt[3]{a^3} \geqslant \sqrt[4]{a^4}$?
2. Решите уравнение:

а) $\frac{1}{\sqrt[4]{x}-1}+\frac{3}{\sqrt[4]{x}+1}=2$; б) $\sqrt[3]{x}-3\sqrt[6]{x}=10$.

3. Упростите выражение:

а) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}$; б) $\sqrt[4]{(1-\sqrt[4]{a})(1+\sqrt[4]{a})+\sqrt[8]{a^4}}$.

С—12

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2+3x+3}=2x+1.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=1, \\ x-y=7. \end{cases}$$

С—13

1. Упростите выражение и вычислите его значение:

а) $15^{-2}\cdot 45^{\frac{5}{3}}:75^{1\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{4}}\cdot 4^{\frac{3}{8}}$;

б) $(b^2\sqrt{b})^{\frac{1}{5}}(b^3\sqrt{b})^{\frac{1}{7}}$ при $b=3$.

2. При каких значениях переменной верно равенство:

а) $(a^{\frac{1}{5}})^5=a$; б) $(a^4)^{\frac{1}{4}}=|a|$?

3. Упростите выражение

$$(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{3}{2}})(x-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}+y^3)+(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{3}{2}})(x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}+y^3).$$

С—14

1. Изобразите схематически график функции $y=3^{-x}$.
2. Сравните числа:

а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{5}}$ и $3^{-2,26}$; б) $((\sqrt{3})^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$ и $3^{1,5}$.

3. Найдите области определения и значений функции

$$y=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^x}.$$

С—15

1. Решите уравнение:

а) $0{,}5^{3-2x}+3\cdot 0{,}25^{1-x}=7$; б) $5^{\frac{6x+3}{x}}=\sqrt[4]{125^{2x+1}}$.

2. Решите неравенство:

а) $25^{\frac{1}{2x}+1}<125^{-\frac{2}{3}}$; б) $4^x\cdot 5+2\cdot 25^x\leqslant 7\cdot 10^x$.

С—16

1. Решите уравнение:

а) $2\cdot 3^{x-6}+6\cdot 9^{0{,}5x-2}=56$; б) $4^{\cos 2x}+4^{\cos^2 x}=3$.

2. Решите неравенство

$$4^x+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1-x}-8\geqslant 0.$$

С—17

1. Прологарифмируйте выражение по основанию 7:

$$\frac{7\sqrt{7}\,a^{\frac{1}{3}}\sqrt[6]{b^2c^3}}{5d^{0{,}5}\sqrt{k}}.$$

2. Известно, что $\log_{30}3=a$, $\log_{30}5=b$. Найдите $\log_{30}8$.

3. Найдите значение числового выражения:

а) $\log_{\sqrt{3}}24-\log_9 4^6$; б) $7^{\log_{11}2}-2^{\log_{11}7}$.

С—18

1. Определите знак числа:

а) $\log_{0{,}3}4$; б) $\lg 3-\frac{1}{3}$.

2. Найдите область определения функции

$$y=\frac{1}{\log_{12}(x-3)}+\sqrt{7-x}.$$

3. Изобразите схематически график функции $y=\lg\sqrt{x}$.

С—19

1. Решите уравнение:

а) $\log_{2x}64-\log_{2x}8=3$; б) $x^{\lg x}=100x$.

2. Решите неравенство:

а) $\lg(x-1)^2>0$; б) $\log_2(x-1)>\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2x-3}$.

С—20

1. Решите уравнение:

а) $\lg^2 x^2 - 3\lg x^2 = 4$; б) $4 - \lg x = 3\sqrt{\lg x}$.

2. Решите неравенство:

а) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-3) > \log_{\frac{1}{2}}(x^2-6)$; б) $4^x - 7\cdot 2^x + 12 > 0$.

С—21

Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 1 - \log_3 2, \\ \log_3(x+y) = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^x\cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4. \end{cases}$

С—22

1. Выведите формулу, задающую функцию g, обратную к данной функции f. Найдите области определения и значений функции g:

а) $f(x) = 3 - x^3$;

б) $f(x) = (\sqrt{1+x^2})^{-3}$, $x \geqslant 0$.

2. По заданному графику функции f найдите значения обратной к ней функции g в точках -1; 1; 2 (рис. 9). Постройте график функции g. Укажите ее области определения и значений.

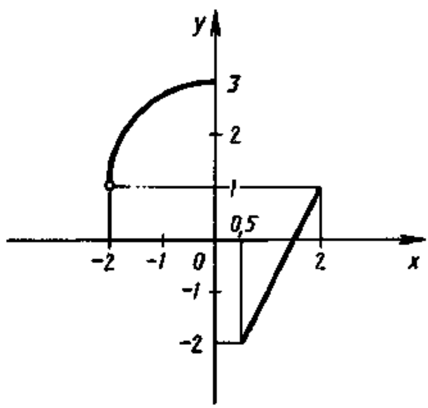

Рис. 9

С—23

1. Найдите производную функции:

а) $f(x) = e^{2-14x}$; б) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{0,5x+1}$.

2. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = e^x - e^{-x}$, параллельной прямой $y = 2x + 1$.

3. Найдите точки максимума и минимума функции

$$f(x) = e^{x^3 - 3x}.$$

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = e^x,\ y = 2 - e^x,\ x = 2.$$

С—24

1. Найдите производную функции:

а) $f(x)=\ln(x^3-2x^2+1)$; б) $f(x)=\log_{\sqrt{2}}\sqrt[3]{3-2x}$.

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\frac{7}{x},\quad x^2-8x+7=0.$$

3. Найдите точки максимума и минимума функции

$$f(x)=\ln^3 x-3\ln x.$$

С—25

1. Найдите промежутки возрастания и убывания функции

$$f(x)=(2-x)\,x^{\sqrt{3}}.$$

2. Вычислите приближенное значение $\sqrt[6]{64{,}12}-\sqrt[6]{63{,}64}$.

3. Найдите первообразную для функции $f(x)=x^{\sqrt{2}}+x^{-\sqrt{2}}$.

С—26

1. Удовлетворяет ли функция $f(x)=e^{-\frac{1}{3}x}$ дифференциальному уравнению $f'(x)=\frac{1}{3}f(x)$?

2. Найдите решение дифференциального уравнения $f'(x)=\ln 5 f(x)$, такое, что $f(6)=5$.

3. Найдите решение дифференциального уравнения $y''=-3y$, удовлетворяющее условиям $y(0)=2$, $y'(0)=6$. Укажите амплитуду, циклическую частоту и начальную фазу этого колебания.

Вариант 8

С—1

1. Является ли функция F первообразной для функции f на промежутке I:

а) $F(x)=2\sqrt{1+x}+1$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$, $I=(-1;\ \infty)$;

б) $F(x)=x^4-\frac{1}{\sqrt{x}}$, $f(x)=4x^3-2\sqrt{x}$, $I=(0;\ \infty)$?

2. Докажите, что функция F есть первообразная для функции f на промежутке I:

а) $F(x)=2\sin^2 x\cos^2 x$, $f(x)=\sin 4x$, $I=(-3;\ 0)$;

б) $F(x)=(x+2)^4$, $f(x)=4x^3+24x^2+48x+32$, $I=(-\infty;\ \infty)$.

С—2

1. Для функции $h(x)=\cos x$ найдите первообразную $H(x)$, такую, что $H\left(-\frac{\pi}{6}\right)=1$. Начертите график этой первообразной.

2. Найдите общий вид первообразных для функции:

а) $f(x)=\frac{3-8x}{\sqrt{8x+1}+2}$; б) $f(x)=\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\sin\frac{x}{4}$.

С—3

Найдите первообразную для функции:

а) $f(x)=\cos(1-1{,}5x)+\sqrt{x+1}$; б) $g(x)=\frac{2}{5\sin^2(2-x)}-\frac{x}{3}$.

С—4

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=0$, $y=\frac{x}{2}$, $y=5-x^2$, $x\geqslant 0$;

б) $y=|\cos x|$, $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}$, $y=0$.

С—5

Вычислите:

а) $\int\limits_1^4 \frac{6}{x\sqrt{x}}\,dx$; б) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x\,dx$.

С—6

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=2x^2$, $y=x+1$;

б) $y=\cos 2x$, $y=\sin x$, $x=0$, $x\geqslant 0$.

С—7

Точка движется по прямой так, что ее скорость в момент времени t равна $v(t)=t^2-t+1$. Известно, что в начальный момент $t=0$ координата точки равна -1. Найдите координату и ускорение точки в момент времени t.

С—8

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\begin{cases} 2-|x| & \text{при } -2\leqslant x<1, \\ 2\sin\frac{\pi x}{6} & \text{при } 1\leqslant x\leqslant 6. \end{cases}$$

2. Вычислите $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

С—9

1. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=z^2+4,\ z=-3,\ z=3.$$

2. Найдите силу давления воды на одну сторону вертикальной стенки, имеющей форму трапеции, нижнее основание которой $a=4$ м, верхнее основание $b=8$ м и высота $h=6$ м, если уровень погружения нижнего основания $c=12$ м.

С—10

1. Верно ли равенство $\sqrt{97-56\sqrt{3}}=7-4\sqrt{3}$?
2. Найдите значение числового выражения:

а) $\sqrt[6]{5\sqrt[7]{5^5}}\cdot\sqrt[7]{5^{-2}}$; б) $\left(\sqrt{5^3}+\frac{1}{\sqrt{5^3}}\right):\left(\sqrt{5}+\sqrt{\frac{1}{5}}\right)$.

3. Пользуясь калькулятором или таблицами, найдите приближенное значение числового выражения:

а) $\sqrt[3]{27{,}31}$; б) $\sqrt[4]{7}+\sqrt[3]{7}$.

4. Сравните числа $\sqrt{\sqrt[7]{13}}$ и $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$.

С—11

1. При каких b справедливо неравенство $\sqrt[5]{b^5}\leqslant\sqrt[6]{b^6}$?
2. Решите уравнение:

а) $\frac{1}{\sqrt[4]{x}+1}+\frac{2}{\sqrt[4]{x}+3}=1$; б) $\sqrt[3]{x}+3\sqrt[6]{x}=18$.

3. Упростите выражение:

а) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; б) $\sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-4\sqrt{ab}}$.

С—12

1. Решите уравнение

$$x-1=\sqrt{2x^2-3x-5}.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3,\\ x+y=9.\end{cases}$$

С—13

1. Упростите выражение и вычислите его значение:

а) $(12^{-\frac{1}{3}}\cdot18^{-\frac{4}{3}}\cdot6^{3,5})^2-3^{\frac{1}{4}}\cdot9^{\frac{3}{8}}$;

б) $(a^3\sqrt[3]{a})^{\frac{1}{5}}(a^2\sqrt[3]{a})^{\frac{1}{7}}$ при $a=3$.

2. При каких значениях переменной верно равенство:

а) $(a^{\frac{1}{7}})^7=-|a|$; б) $(a^6)^{\frac{1}{6}}=a$?

3. Упростите выражение

$$\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y}+\frac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}y}\right)\frac{x-y}{2\sqrt{xy}}.$$

С—14

1. Изобразите схематически график функции $y=0{,}5^{-x}$.
2. Сравните числа:

а) $\left(\frac{1}{7}\right)^{\sqrt{7}}$ и $7^{-2{,}75}$; б) $((\sqrt{5})^{\sqrt{5}})^{\sqrt{5}}$ и $5^{2{,}5}$.

3. Найдите области определения и значений функции

$$y=\sqrt{3-\left(\frac{1}{3}\right)^x}.$$

С—15

1. Решите уравнение:

а) $0{,}2^{3-2x}+3\cdot 0{,}04^{2-x}=8$; б) $3^{\frac{6x-3}{x}}=\sqrt[4]{27^{2x-1}}$.

2. Решите неравенство:

а) $27^{\frac{1}{3x}+2}>\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{2}}$; б) $2^{2x+1}+25^{x+0{,}5}\geqslant 7\cdot 10^x$.

С—16

1. Решите уравнение:

а) $4\cdot 9^{1{,}5x-1}-27^{x-1}=33$; б) $2^{\sin^2 x}+5\cdot 2^{\cos^2 x}=7$.

2. Решите неравенство

$$7{,}3^{\frac{x^2+2x-15}{x-4}}>1.$$

С—17

1. Прологарифмируйте выражение по основанию 5:

$$\frac{0{,}04\sqrt{b\sqrt{b\sqrt{b}}}}{(a\sqrt[3]{a})^{\frac{3}{4}}}.$$

2. Известно, что $\log_{60} 2=a$, $\log_{60} 5=b$. Найдите $\log_{60} 27$.
3. Найдите значение числового выражения:

а) $\log_{\sqrt{2}} 54-\log_4 9^6$; б) $2^{\log_3 11}-11^{\log_3 2}$.

С—18

1. Определите знак числа:

а) $\log_{\sqrt{2}} 3-3$; б) $\log_2 3+\log_2 0{,}09$.

2. Найдите область определения функции

$$g(x)=\frac{1}{\log_{0{,}5}(x+2)}+\sqrt{3-x}.$$

3. Изобразите схематически график функции $y=\lg\frac{1}{x}$.

С—19

1. Решите уравнение:

а) $3\cdot 2^{x+1}-6\cdot 2^{x-1}=12$; б) $x^{\lg x}=1000x^2$.

2. Решите неравенство:

а) $2^{\frac{4}{x}}<8^{\frac{1}{x}-\frac{1}{9}}$; б) $\log_3(x+1)<\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2x+5}$.

С—20

1. Решите уравнение:

а) $\lg^2 x^2+\lg x^2=6$; б) $5-2\lg x=3\sqrt{\lg x}$.

2. Решите неравенство:

а) $\log_3(x^2+5)>\log_3(x+7)$; б) $9^x-8\cdot 3^x+15<0$.

С—21

Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=2+\log_2 5,\\ \log_{0,5}(x-y)=0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=972,\\ \log_{\sqrt{3}}(x-y)=2.\end{cases}$

С—22

1. Выведите формулу, задающую функцию g, обратную к функции f. Найдите области определения и значений функции g:

а) $f(x)=1-8x^3$;

б) $f(x)=(\sqrt{2+x^2})^{-3}$, $x\leqslant 0$.

2. По заданному графику функции f найдите значения обратной к ней функции g в точках -2; -1; 3 (рис. 10). Постройте график функции g. Найдите ее области определения и значений.

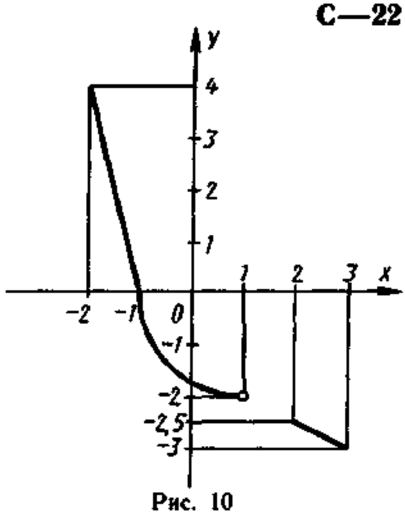

Рис. 10

С—23

1. Найдите производную функции:

а) $f(x)=e^{4-7x}$; б) $f(x)=4^{2-3x}$.

2. Напишите уравнение горизонтальной касательной к графику функции $f(x)=e^x+e^{-x}$.

3. Найдите точки максимума и минимума функции

$$f(x)=e^{x^4-2x^2}.$$

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=-e^{2x}+(e+1)e^{x+1}-e^3,\ y=0.$$

С—24

1. Найдите производную функции:

а) $f(x)=\ln(x^4-3x^3+x)$; б) $f(x)=\log_{\sqrt{3}}\sqrt[4]{4-0{,}1x}$.

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\frac{5}{x},\ x^2-6x+5=0,\ y=0.$$

3. Найдите точки максимума и минимума функции

$$f(x)=\log_2^4 x-2\log_2^2 x+2.$$

С—25

1. Найдите промежутки возрастания и убывания функции

$$f(x)=(x-1)\,x^{\sqrt{2}}.$$

2. Вычислите с помощью калькулятора приближенное (с точностью до 0,001) значение выражения

$$\sqrt[5]{32{,}15}-\sqrt[5]{31{,}75}.$$

3. Найдите первообразную для функции

$$f(x)=x^{\sqrt{3}}+x^{-\sqrt{3}}.$$

С—26

1. Удовлетворяет ли функция $f(x)=e^{-3x}$ дифференциальному уравнению $f'(x)=3f(x)$?

2. Найдите решение дифференциального уравнения $f'(x)=$ $=\ln 9\, f(x)$, такое, что $f(3)=9$.

3. Найдите решение дифференциального уравнения $y''=-4y$, удовлетворяющее условиям $y(0)=1$, $y'(0)=-2\sqrt{3}$. Укажите амплитуду, циклическую частоту и начальную фазу этого колебания.

Вариант 9

С—1

1. Докажите, что функция $F(x)=x\,|x|$ является первообразной для функции $f(x)=2\,|x|$ на промежутке $(-\infty;\ \infty)$.

2. Является ли функция F первообразной для функции f на промежутке I:

а) $F(x)=\sqrt{4x^7-1}+5$, $f(x)=\dfrac{14x^6}{\sqrt{4x^7-1}}$, $I=(3;\ 4)$;

б) $F(x)=\dfrac{2}{x^3-3}$, $f(x)=-\dfrac{6x^2}{(x^3-3)^2}$, $I=(1;\ 2)$?

С—2

1. Для функции $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M(\sqrt{2};\ 2)$. Начертите этот график.

2. Найдите общий вид первообразных для функции:

а) $f(x)=\cos^2 x$; б) $f(x)=\dfrac{x}{(x^2+1)^2}$.

С—3

Найдите первообразную для функции:

а) $g(x)=\dfrac{2}{\cos^2(x-1)}-3\sin(4-3x)+1$;

б) $g(x)=x\sin x+\sqrt{2x-1}$, пользуясь формулой для производной функции $f(x)=x\cos x$.

С—4

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=0$ и $y=\begin{cases} 2\cos x \text{ при } -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 0, \\ -x+2 \text{ при } 0<x\leqslant 2; \end{cases}$

б) $y=\sqrt{|x|}$, $y=0$, $x=-4$, $x=1$.

С—5

1. Вычислите:

а) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)dx$; б) $\displaystyle\int_{-1}^{4}\left(1+\frac{x}{2}\right)^8$.

2. При каких A выражение $\left|\displaystyle\int_1^A\frac{dx}{x^2}-1\right|$ меньше 0,1? 0,001?

С—6

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\frac{4}{x^2},\ x=1,\ y=x-1.$$

2. Из геометрических соображений вычислите интеграл

$$\int_{-2}^{2}(3+\sqrt{4-x^2})\,dx.$$

С—7

Материальная точка массой 5 кг движется по прямой так, что действующая на нее сила в момент времени t равна $6t-\frac{2}{t^3}$. Найдите путь, пройденный точкой за промежуток времени от 2 до 5 с, если известно, что ее скорость в момент $t=1$ равна 3 м/с. (Сила измеряется в ньютонах, время — в секундах.)

С—8

1. В каком отношении парабола $y=\frac{x^2}{2}$ делит площадь круга $x^2+y^2\leqslant 8$?

2. Вычислите $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^4 x\,dx$.

С—9

1. Найдите объем чердака, основание которого есть прямоугольник со сторонами a и b, верхнее ребро равно c, а высота равна h.

2. Определите кинетическую энергию однородного цилиндра, катящегося без проскальзывания по плоскости со скоростью 1 м/с. Радиус цилиндра равен R м, масса цилиндра m кг.

С—10

1. Верно ли равенство

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{\frac{9-5\sqrt{3}}{9+5\sqrt{3}}}\ ?$$

2. Докажите формулу сложного радикала

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\ .$$

3. Сократите дробь $\frac{a-b}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}$.

4. Какое из чисел больше:

$$\sqrt[3]{1990}+\sqrt[3]{1992}\ \text{или}\ 2\sqrt[3]{1991}\,?$$

С—11

1. Найдите значение числового выражения

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\times$$
$$\times\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\ .$$

2. Решите уравнение:

а) $x-1=7(\sqrt[3]{x}-1)$;

б) $\sqrt[3]{(x+1)^2}-2\sqrt[3]{x^2-1}=3\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

3. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{\frac{a}{b}}+1\right)$;

б) $\sqrt{a^2+a\sqrt{8}+2}+\sqrt{a^2-a\sqrt{8}+2}$.

С—12

1. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{10-x}-\sqrt[3]{3-x}=1.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x\sqrt{x}+3y\sqrt{x}=36, \\ y\sqrt{y}+3x\sqrt{y}=28. \end{cases}$$

С—13

1. Найдите значение числового выражения

$$\left(\frac{2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}+3^{\frac{1}{6}}}\right)^3+\left(\frac{2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}-3^{\frac{1}{6}}}\right)^3.$$

2. Упростите выражение

$$\left(\frac{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}+(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}-(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-2},$$

где $x=a\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{\frac{1}{2}}$, $a>0$, $0<m<n$.

С—14

1. Изобразите схематически график функции

$$y=\lg\lg 10^{x+1}.$$

2. Сравните числа

$$(7-4\sqrt{3})^{3,8} \text{ и } (7+4\sqrt{3})^{-3,5}.$$

3. Найдите области определения и значений функции

$$y=\sqrt{2^{2x}-2^{x+3}+15}.$$

С—15

1. Решите уравнение:

а) $2^{x^3-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$; б) $9^x-2^{x+\frac{1}{2}}=2^{x+\frac{7}{2}}-3^{2x-1}$.

2. Решите неравенство:

а) $2{,}5^{\frac{x^2-9x+14}{x-3}}>1$; б) $x^2\cdot 2^x+1>x^2+2^x$.

С—16

1. Решите уравнение:

а) $4^{x+\frac{1}{2}}+\frac{2}{4^x}+14=9\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)$;

б) $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x+(\sqrt{5-2\sqrt{6}})^x=10$.

2. Решите неравенство

$$3^{\sin x}>\left(\frac{1}{3}\right)^{|\cos x|}.$$

С—17

1. Известно, что $\lg 2=a$, $\log_2 7=b$. Найдите $\lg 56$.
2. Упростите выражение

$$\left(x^{1+\frac{1}{2\log_4 x}}+8^{\frac{1}{3\log_{x^2}2}}+1\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. Какое из чисел больше:

$$\log_2 3 \text{ или } \log_3 5?$$

С—18

1. Изобразите схематически график функции

$$y=||\ln x-1|-1|.$$

2. Вычислите

$$\lg\operatorname{tg}1^\circ+\lg\operatorname{tg}2^\circ+\ldots+\lg\operatorname{tg}88^\circ+\lg\operatorname{tg}89^\circ.$$

3. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{\lg^2 x-4\lg x+3}.$$

С—19

1. Решите уравнение:

а) $\log_x(x+2)=2$; б) $\log_{\frac{1}{3}} x=x-4$.

2. Решите неравенство:

а) $\lg(x-1)+\lg(x-3)<\lg\left(\frac{3}{2}x-3\right)$;

б) $2^{\sqrt{1-x}}-x\lg x>0$.

С—20

1. Решите уравнение:

а) $\log_{x+1}(x-0{,}5)=\log_{x-0{,}5}(x+1)$;

б) $\left|\frac{1}{3}-\log_{\frac{1}{8}} x\right|+\frac{1}{3}=\left|\frac{2}{3}-\log_{\frac{1}{8}} x\right|$.

2. Решите неравенство:

а) $\log_2^2 x+\log_2 x^2\leqslant -1$; б) $\sqrt{\log_x\sqrt{5x}}<-\log_x 5$.

С—21

Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2=1+6\log_4 y,\\ y^2=y\cdot 2^x+2^{2x+1}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (2^x+1)\,2^{y+1}=9,\\ \sqrt{x+y^2}=x+y. \end{cases}$

С—22

1. Обратима ли на всей числовой прямой функция:

а) $y=x^2-3$; б) $y=2x^3-5x+3$;

в) $y=x^3+4x$; г) $y=\sqrt[5]{x}$?

2. Может ли обратимая на отрезке [1; 3] функция иметь максимум в точке 2? Ответ обоснуйте.

С—23

1. Найдите точки экстремумов функции

$$f(x)=xe^{x^2-3x}.$$

2. Постройте график функции $y=3^{\log_3(x^2-4x+1)}$.

3. Какое из чисел больше: $2^{\sqrt{3}}$ или $3^{\sqrt{2}}$?

4. Найдите первообразную для функции $f(x)=(2x-1)\,2^{x^2-x}$.

С—24

1. Найдите производную функции:

а) $f(x)=\log_3^2(x^3+\cos x)$; б) $f(x)=\ln\sin\frac{x}{2}$.

2. Вычислите $\int\limits_0^3 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$.

3. Найдите промежутки возрастания и убывания функции

$$f(x)=1{,}5\ln^2 x-\ln^3 x.$$

С—25

1. Найдите производную функции $y=x^x$.

2. Вычислите приближенно $\sqrt[4]{16{,}08}-\sqrt[5]{32{,}60}$.

3. Найдите промежутки возрастания и убывания функции

$$y=(x^2-2x+1)\,x^{\sqrt{2}}.$$

С—26

1. Период полураспада радиоактивного вещества равен 3 ч. Через какой промежуток времени от 8 кг этого радиоактивного вещества останется 0,25 кг?

2. Запишите решение дифференциального уравнения

$$3y^2y'=y^3.$$

3. Найдите решение дифференциального уравнения $y''=-0{,}25y$, удовлетворяющее условиям

$$y(0)=\frac{3}{2},\ y'(0)=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

С—1

1. Докажите, что функция $F(x)=x^3|x|$ является первообразной для функции $f(x)=4x^2|x|$ на промежутке $(-\infty;\ \infty)$.

2. Является ли функция F первообразной для функции f на промежутке I:

а) $F(x)=\sqrt{4x^5-3x^2}+7$, $f(x)=\frac{10x^4-3x}{\sqrt{4x^5-3x^2}}$, $I=(1;\ 2)$;

б) $F(x)=\frac{1}{(x^3+3)^2}$, $f(x)=\frac{-6x^2}{(x^3+3)^3}$, $I=(-2;\ -1)$?

С—2

1. Для функции $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M(\sqrt{3};\ 3)$. Начертите этот график.

2. Найдите общий вид первообразных для функции:

а) $f(x)=\sin^2 x$; б) $f(x)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$.

С—3

Найдите первообразную для функции:

а) $f(x)=\frac{2}{\sin^2(x+1)}+3\cos(3-4x)+1$;

б) $g(x)=x\cos x-\sqrt{1+2x}$, пользуясь формулой для производной функции $f(x)=x\sin x$.

С—4

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=0$ и $y=\begin{cases} x+2 \text{ при } -2\leqslant x\leqslant 0, \\ 2\cos x \text{ при } 0<x\leqslant \frac{\pi}{2}; \end{cases}$

б) $y=\sqrt{|x|}$, $x=-9$, $x=4$, $y=0$.

С—5

1. Вычислите:

а) $\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} 12\sin\left(\frac{\pi}{8}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}-x\right)dx$; б) $\int\limits_{2}^{3}\frac{6x^2dx}{(2x^3-1)^2}$.

2. При каких A выражение $\left|\int\limits_{-A}^{-1}\frac{dx}{x^2}-1\right|$ меньше 0,1? 0,001? ε?

С—6

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\frac{9}{x^2},\ y=x-2,\ x=2.$$

2. Из геометрических соображений вычислите интеграл

$$\int\limits_{-3}^{3}(3-\sqrt{9-x^2})\,dx.$$

С—7

Материальная точка массой 1 кг движется по прямой так, что действующая на нее сила в момент времени t равна $6t-\frac{4}{t^3}$. Найдите путь, пройденный точкой за промежуток времени от 3 до 8 с, если известно, что ее скорость в момент $t=2$ равна 2 м/с. (Сила измеряется в ньютонах, время — в секундах.)

С—8

1. В каком отношении парабола $y^2=x$ делит площадь круга $x^2+y^2\leqslant 2$?

2. Вычислите

$$\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\left(x-\frac{\pi}{12}\right)dx.$$

С—9

1. Найдите объем многогранника, параллельные основания которого суть прямоугольники со сторонами A, B и a, b, все четыре боковые грани — четырехугольники, а высота равна h.

2. Аквариум, имеющий форму полушара радиуса r, заполнен водой. Определите силу давления воды на стенки аквариума.

С—10

1. Верно ли равенство

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt[3]{20+12\sqrt{3}}}\ ?$$

2. Докажите формулу сложного радикала

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

3. Сократите дробь $\dfrac{a-b}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}$.

4. Какое из чисел больше:

$$\sqrt[3]{9999}+\sqrt[3]{10\,001}\ \text{или}\ 2\sqrt[3]{10\,000}?$$

С—11

1. Найдите значение числового выражения

$$\sqrt{33+\sqrt{8}}\cdot\sqrt{6+\sqrt{3+\sqrt{8}}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{8}}}}\times$$
$$\times\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{8}}}}.$$

2. Решите уравнение:

а) $x+1=3\sqrt[3]{x}+3$; б) $\sqrt[3]{(1+x)^2}+2\sqrt[3]{(1-x)^2}=3\sqrt[3]{1-x^2}$.

3. Упростите выражение:

а) $\dfrac{a-b}{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}-\sqrt[4]{b^3}}:\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{b}}\right)$;

б) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$.

С—12

1. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{9-x}+\sqrt[3]{7+x}=4.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+x\sqrt[3]{xy^2}=80, \\ y^2+y\sqrt[3]{yx^2}=5. \end{cases}$$

С—13

1. Найдите значение числового выражения

$$\left(\frac{5^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}+5^{\frac{1}{6}}}\right)^3+\left(\frac{5^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}-5^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{6}}-2^{\frac{1}{6}}}\right)^3.$$

2. Упростите выражение

$$\left(\frac{(a+x)^{-0,5}(b+x)^{-0,5}+(a-x)^{-0,5}(x-b)^{-0,5}}{(a+x)^{-0,5}(x+b)^{-0,5}-(a-x)^{-0,5}(x-b)^{-0,5}}\right)^{-2},$$

где $x=\sqrt{ab}$, $0<b<a$.

С—14

1. Изобразите схематически график функции

$$y=\log_2\log_2 4^{1-x}.$$

2. Сравните числа

$$(5-2\sqrt{6})^{3,3} \text{ и } (5+2\sqrt{6})^{-3,1}.$$

3. Найдите области определения и значений функции

$$y=\sqrt{3^{2x}-3^{x+2}+20}.$$

С—15

1. Решите уравнение:

а) $3^{x^2+1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{1+x}$; б) $4^x-3^{x+\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{3}{2}}-7\cdot 2^{2x-1}$.

2. Решите неравенство:

а) $8,6^{\frac{x^2+3x-10}{x-3}}\leqslant 1$; б) $x^2\cdot 3^x+9>x^2+9\cdot 3^x$.

С—16

1. Решите уравнение:

а) $9^{x+\frac{1}{2}}+\frac{3}{9^x}+26=16(3^x+3^{-x})$;

б) $(\sqrt{7+\sqrt{48}})^x+(\sqrt{7-\sqrt{48}})^x=14$.

2. Решите неравенство

$$2^{\operatorname{tg} x}>\left(\frac{1}{2}\right)^{-\operatorname{ctg} x}.$$

С—17

1. Известно, что $\lg 5=a$, $\lg 3=b$. Найдите $\log_{30} 8$.
2. Упростите выражение

$$\sqrt[3]{\log_2 2x^2+\log_2 x\cdot x^{\log_x(\log_2 x+1)}+\frac{1}{2}\log_4^2 x^4+2^{-3\log_{0,5}\log_2 x}}.$$

3. Какое из чисел больше: $\log_3 5$ или $\sqrt{2}$?

С—18

1. Изобразите схематически график функции

$$y=||\ln x-2|-1|.$$

2. Вычислите $\lg \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \ldots \cdot \lg \operatorname{tg} 88^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 89^\circ$.
3. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{\lg^2 x+5\lg x+4}.$$

С—19

1. Решите уравнение:

а) $\log_x(x+6)=2$; б) $\sqrt{\log_x \sqrt{5x}}=-\log_x 5$.

2. Решите неравенство:

а) $\lg(2x-1)+\lg(2x-3)>\lg(3x-3)$;

б) $2^{\sqrt{10-x}}-(x-9)\lg(x-9)<0$.

С—20

1. Решите уравнение:

а) $0{,}5\lg(8-x)=\lg(1+\sqrt{x+5})$;

б) $|1-\log_{\frac{1}{9}} x|+1=|2-\log_{\frac{1}{9}} x|$.

2. Решите неравенство:

а) $\log_4^2 x+\log_4\sqrt{x}>1{,}5$; б) $\log_x 2x\leqslant\sqrt{\log_x(2x^3)}$.

С—21

Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^{y^2-15y+56}=1, \\ y-x=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-y\sqrt{xy}=36, \\ y^2-x\sqrt{xy}=72. \end{cases}$

С—22

1. Обратима ли на всей числовой прямой функция:

а) $y=x^2+1$; б) $y=x^3-31x+2$;

в) $y=x^3+7x$; г) $y=\sqrt[3]{x}$?

2. Может ли обратимая на отрезке $[-1; 1]$ функция иметь минимум в точке 0? Ответ обоснуйте.

С—23

1. Найдите точки максимумов функции $f(x)=x\left(\frac{1}{e}\right)^{x^2-x}$.

2. Постройте график функции $y=10^{\lg|x+1|-2}$.

3. Какое из чисел больше: π^e или e^π?

4. Найдите первообразную для функции $f(x)=(3x^2+1)\cdot 4^{x^3+x}$.

С—24

1. Найдите производную функции:

а) $f(x)=\log_2^2(x^2-\sin x)$; б) $f(x)=\ln\cos\frac{x}{2}$.

2. Вычислите $\int\limits_2^3 \frac{3x^2}{x^3-1}\,dx$.

3. Найдите промежутки возрастания и убывания функции

$$y=1{,}5\lg^2 x+\lg^3 x.$$

С—25

1. Найдите производную функции $y=(\sqrt{x})^{2x}$.

2. Вычислите приближенно $\sqrt[5]{32{,}20}-\sqrt[4]{15{,}88}$.

3. Найдите промежутки возрастания и убывания функции

$$y=(x^2-4x+4)\,x^{\sqrt{3}}.$$

С—26

1. Период полураспада радиоактивного вещества равен 2,5 ч. Через какой промежуток времени от 4 кг этого вещества останется 0,5 кг?

2. Запишите решения дифференциального уравнения

$$2yy'=y^2.$$

3. Найдите решение дифференциального уравнения $y''=-3y$, удовлетворяющее условиям

$$y(0)=-2,\ y'(0)=-6.$$

ПОВТОРИТЕЛЬНЫЕ САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Вариант 1

ПС—1

1. Вычислите

$$\frac{7-4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}+\frac{7+4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}.$$

2. Число деталей, которое рабочий должен был изготовить по плану, составляет 80% числа фактически изготовленных деталей. На сколько процентов рабочий перевыполнил план?

ПС—2

1. Скорость поезда увеличилась с 70 до 85 км/ч. На сколько процентов уменьшилось время, затрачиваемое поездом на один и тот же путь?

2. Напишите уравнение прямой, параллельной прямой $y=2x-1$ и проходящей через точку $M(5;1)$.

ПС—3

1. Упростите выражение

$$\frac{a^2-ac^2+2c^2-4}{a^2+2a+2c^2-c^4}-\frac{a^2-4a+4}{a^2+ac^2-2a-2c^2}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{x}{x-3}+\frac{4}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}.$$

ПС—4

1. Для функции $y=2x^2-3x+1$ найдите множество значений переменной x, для которых $y\geqslant 0$, $y<0$.

2. Разложите (если это возможно) квадратный трехчлен $x^2-7x+10$ на множители.

3. Запишите квадратное уравнение, корнями которого служат числа $-0{,}2$ и -5.

ПС—5

1. Найдите формулу n-го члена и сумму первых 15 членов арифметической прогрессии с первым членом 3,4 и разностью 0,9.

2. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии с первым членом 3,5 и знаменателем $-\frac{2}{3}$.

3. Представьте бесконечную десятичную дробь 2,3 (45) в виде обыкновенной.

ПС—6

1. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\cos 2\alpha+1-\cos^2\alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}$, найдите его значение при $\alpha=-\frac{3\pi}{4}$;

б) $-\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(\pi-\alpha)}{\cos^2(\pi-\alpha)\,\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$.

2. Докажите тождество:

а) $\dfrac{2\sin 2\alpha-\sin 4\alpha}{\sin 4\alpha+2\sin 2\alpha}=\mathrm{tg}^2\,\alpha$; б) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{2}{\sin\alpha}$.

ПС—7

1. Решите уравнение:

а) $\cos 5x=\cos 3x$; б) $\mathrm{tg}^2\,x-3\,\mathrm{tg}\,x+2=0$.

2. Решите неравенство

а) $\sin 2x>-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\mathrm{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>1$.

ПС—8

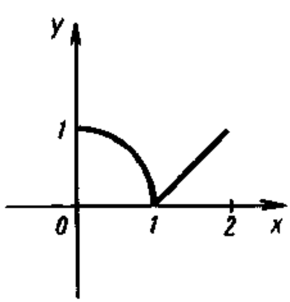

Рис. 11

1. Найдите область определения функции:

а) $f(x)=\sqrt{5-x}+\log_2 x$; б) $y=\sqrt{\sin x}$.

2. Исследуйте функцию на четность и нечетность:

а) $f(x)=x^5-x$; б) $f(x)=\cos x+\cos 2x$;

в) $f(x)=\mathrm{tg}(x-1)$.

3. На рисунке 11 изображен график функции f на отрезке [0; 2]. Известно, что период функции f равен 2. Постройте график функции f на отрезке [−2; 8].

ПС—9

Постройте схематически график функции f (без помощи производной), укажите ее области определения и значений, промежутки возрастания и убывания, максимумы и минимумы:

а) $f(x)=\frac{3}{x}$; б) $f(x)=x^2-4$;

в) $f(x)=\cos x+2$; г) $f(x)=\lg(x-1)$.

ПС—10

1. Найдите производную функции:

а) $y=3x^3+2x^{\sqrt{2}}-1$; б) $y=xe^x$; в) $y=\frac{3x-1}{x+2}$.

2. С помощью формулы дифференцирования сложной функции найдите производную функции

$$f(x)=(x^2-1)^{102}.$$

3. Проверьте, что функция

$$f(x)=2\sin 2x+3\cos 2x$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''=-4y$.

ПС—11

1. Решите методом интервалов неравенство:

а) $x^2+x-6>0$; б) $\frac{(x-3)(x+1)^2}{x-2}\leqslant 0$;

в) $\frac{x^2-5x+4}{x^2-6x+8}>0$.

2. Запишите уравнение касательной к графику функции

$$f(x)=x^3-3x+5$$

в точке с абсциссой $x_0=2$.

3. Найдите скорость материальной точки, движущейся прямолинейно по закону $x(t)=3t^3-\frac{9}{t}$ в момент времени $t=3$ (x измеряется в метрах, t — в секундах).

ПС—12

1. Решите неравенство $f'(x)>g'(x)$, где

$$f(x)=x^2-x,\ g(x)=\ln x.$$

2. Найдите промежутки возрастания и убывания и экстремумы функции

$$f(x)=x^3-12x+2.$$

Постройте ее график.

ПС—13

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=x^3-3x+7$$

на отрезке $[-3;\ 1]$.

2. Требуется изготовить коническую воронку с образующей $l=15$ см. Найдите высоту воронки наибольшего объема.

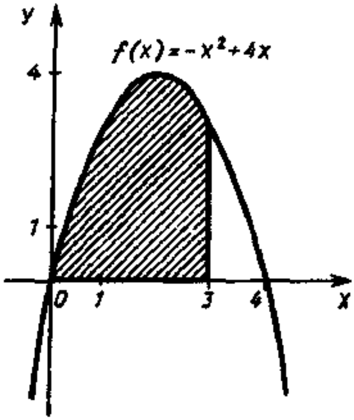

Рис. 12

ПС—14

1. Найдите общий вид первообразных для функции f:

а) $f(x)=x^2+3\sin x$;

б) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}-\cos(3x-1)$.

2. Вычислите:

а) $\int\limits_{-2}^{1}(4x^3+6x)\,dx$; б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x dx$.

3. Найдите площадь фигуры, заштрихованной на рисунке 12.

ПС—15

1. Упростите выражение $25^{\frac{1}{2}\log_5 12}+7^{2\log_7 2}$

2. Решите уравнение:

а) $\log_2(2x-3)=\log_2(3x-5)$; б) $3^{2x-4}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x}$.

3. Решите неравенство $\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2}<\frac{27}{64}$.

ПС—16

1. Решите уравнение:

а) $3^{2x+1}-10\cdot 3^x+3=0$; б) $\sqrt{x+13}-\sqrt{x+1}=2$.

2. Решите неравенство

$$\lg(x^2+x+8)<1.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3+y^3=9,\\ \log_2 x+\log_2 y=1.\end{cases}$$

ПС—17

1. Найдите производную функции

$$y=e^{3x}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}.$$

2. Найдите общий вид первообразных для функции

$$f(x)=e^{2x}-3^x.$$

3. Напишите уравнение касательной к графику функции

$$f(x)=2^{x-3}$$

в точке с абсциссой $x_0=4$.

ПС—18

1. Найдите производную функции:

а) $y=\ln(3x-1)$; б) $y=(x+1)\,x^{\sqrt{3}}$.

2. Найдите общий вид первообразных для функции:

а) $f(x)=\frac{1}{3x+1}$; б) $f(x)=(2x+7)^{\sqrt{5}}$.

3. Является ли функция $f(x)=2^x$ решением дифференциального уравнения $y'=y\ln 2$?

Вариант 2

ПС—1

1. Вычислите $\frac{9-4\sqrt{5}}{9+4\sqrt{5}}+\frac{9+4\sqrt{5}}{9-4\sqrt{5}}$.

2. Число деталей, которые рабочий должен был изготовить по плану, составляет 60% числа фактически изготовленных им деталей. На сколько процентов рабочий перевыполнил план?

ПС—2

1. Скорость поезда увеличилась с 75 до 80 км/ч. На сколько процентов уменьшилось время, затрачиваемое поездом на один и тот же путь?

2. Напишите уравнение прямой, параллельной прямой $y=3-0{,}5x$ и проходящей через точку $M(-1;\ 3)$.

ПС—3

1. Упростите выражение

$$\frac{a^4-b^4}{4a^2-2a+b-b^2}:\frac{a^3-a^2b+ab^2-b^3}{2a-b}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{5}{3-x}+\frac{x}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}.$$

ПС—4

1. Для функции $y=3x^2+2x+1$ найдите множество значений переменной x, для которых $y\leqslant 0$, $y>0$.

2. Разложите (если это возможно) квадратный трехчлен $x^2+9x+18$ на множители.

3. Запишите квадратное уравнение, корнями которого служат числа $-\frac{1}{3}$ и -3.

ПС—5

1. Найдите формулу n-го члена и сумму первых 20 членов арифметической прогрессии с первым членом 5,7 и разностью 0,8.

2. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии с первым членом $-4{,}5$ и знаменателем $-0{,}75$.

3. Обратите бесконечную десятичную дробь 1,4(54) в обыкновенную.

ПС—6

1. Упростите выражение:

а) $\dfrac{2\sin(\pi-\alpha)+\sin 2\alpha}{2\cos\alpha+1+\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}$, найдите его значение при $\alpha=-\frac{5\pi}{4}$;

б) $-\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$.

2. Докажите тождество:

а) $\dfrac{\sin 2\alpha+\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha}=2\cos^2\alpha$; б) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\dfrac{2}{\cos\alpha}$.

ПС—7

1. Решите уравнение:

а) $\sin 7x=\sin 3x$; б) $\operatorname{tg} x+3\operatorname{ctg} x=4$.

2. Решите неравенство:

а) $\cos 2x>\frac{1}{2}$; б) $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}$.

ПС—8

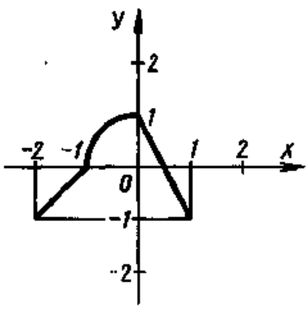

Рис. 13

1. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{3-x}+\log_{0,5}x$; б) $y=\sqrt{\cos x}$.

2. Исследуйте функцию на четность и нечетность:

а) $f(x)=3x^7-x^3$; б) $f(x)=x\operatorname{ctg} x+x^4$;
в) $f(x)=\operatorname{ctg}(x-2)$.

3. На рисунке 13 изображен график функции f на отрезке $[-2; 1]$. Известно, что период функции f равен 3. Постройте график функции f на отрезке $[-6; 6]$.

ПС—9

Постройте схематически график функции (без помощи производной), укажите ее области определения и значений, промежутки возрастания и убывания, максимумы и минимумы:

а) $f(x)=-\frac{2}{x}$; б) $f(x)=9-x^2$;
в) $f(x)=2\sin x-1$; г) $f(x)=\ln(x+1)$.

ПС—10

1. Найдите производную функции:

а) $y=2x^4-3x^{\sqrt{3}}+12$; б) $y=x\ln x$; в) $y=\frac{3x+1}{x-2}$.

2. С помощью формулы дифференцирования сложной функции найдите производную функции

$$f(x)=(x^3+1{,}5x^2)^{68}.$$

3. Проверьте, что функция

$$f(x)=3\cos 3x-2\sin 3x$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''=-9y$.

ПС—11

1. Решите методом интервалов неравенство:

а) $x^2+2x-15<0$; б) $\frac{(x+1)(x-3)^2}{x+4}\geqslant 0$;

в) $\frac{x^2+5x+4}{x^2+6x+8}\leqslant 0$.

2. Запишите уравнение касательной к графику функции

$$f(x)=x^3-\frac{1}{3}x-1$$

в точке с абсциссой $x_0=3$.

3. Найдите скорость материальной точки, движущейся прямолинейно по закону

$$x(t)=4t^4-\frac{8}{t}$$

в момент времени $t=2$ (x измеряется в метрах, t — в секундах).

ПС—12

1. Решите неравенство $f'(x)\leqslant g'(x)$, где

$$f(x)=x^2+x,\ g(x)=\ln x.$$

2. Найдите промежутки возрастания и убывания и экстремумы функции

$$f(x)=-x^3+3x+1.$$

Постройте ее график.

ПС—13

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=3x^3-x+1$$

на отрезке $[-2;\ 3]$.

2. Требуется изготовить коническую воронку с образующей $l=10$ см. Каков должен быть радиус основания воронки, чтобы ее объем был наибольшим?

ПС — 14

1. Найдите общий вид первообразных для функции f:

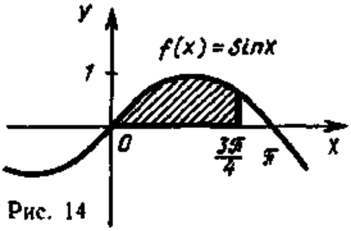

Рис. 14

а) $f(x)=x^3-2\cos x$;

б) $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}-\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

2. Вычислите:

а) $\int\limits_{-1}^{2}(5x^4+6x^2)\,dx$; б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos 3x\,dx$.

3. Найдите площадь фигуры, заштрихованной на рисунке 14.

ПС — 15

1. Упростите выражение $9^{\log_3 6} : 2^{\frac{1}{2}\log_2 16}$.

2. Решите уравнение:

а) $\lg(2x-3)=\lg(3x-2)$; б) $(0{,}2)^{3x-4}=5^{2-5x}$.

3. Решите неравенство $\log_2^2 x-2\log_2 x^2>-3$.

ПС — 16

1. Решите уравнение:

а) $2^{2x+1}-5\cdot 2^x+2=0$; б) $\sqrt{x+17}-\sqrt{x+1}=2$.

2. Решите неравенство $\lg(x^2-x+8)>1$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^3-y^3=56, \\ \log_2 x-\log_2 y=1. \end{cases}$

ПС — 17

1. Найдите производную функции

$$y=e^{-0{,}3x}+2^{1-2x}.$$

2. Найдите общий вид первообразных для функции

$$f(x)=e^{-0{,}5x}+2^x.$$

3. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=3^{2x-3}$ в точке с абсциссой $x_0=2$.

ПС — 18

1. Найдите производную функции:

а) $y=\ln(2x+1)$; б) $y=(2x-1)\,x^{\sqrt{2}}$.

2. Найдите общий вид первообразных для функции:

а) $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}$; б) $f(x)=(2x-3)^{\sqrt{6}}$.

3. Является ли функция $f(x)=2\cdot 3^x$ решением дифференциального уравнения $y'=y\ln 3$?

Вариант 3

ПС—1

1. Упростите выражение:

а) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}\cdot\sqrt{7-2\sqrt{10}}$; б) $\frac{5-\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}$.

2. Решите уравнение:

а) $x^5+32=0$; б) $x^4-81=0$;

в) $\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}-3=0$.

ПС—2

1. Дано квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$. Известно, что $a+b+c=0$. Назовите корни этого уравнения.

2. Решите неравенство

$$(x^2+2x)^2>9.$$

3. Сумма двух чисел равна 65, а их среднее арифметическое на 2,5 больше среднего геометрического. Найдите эти числа.

ПС—3

1. Может ли числовое значение выражения

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{-1,5}-2(x+5)^0+\frac{x^{0,4}-2x^{-0,6}}{x^{-1,6}-2x^{-2,6}}$$

быть равным $5\frac{3}{8}$? Ответ объясните.

2. Решите уравнение

$$\frac{2x}{x-3}+\frac{x-3}{x-4}=\frac{7x-27}{x^2-7x+12}.$$

ПС—4

1. Найдите корни уравнения $x^2-3|x|+2=0$, удовлетворяющие неравенству $|x-1|\leqslant 2,5$.

2. Найдите значения a, при которых парабола $y=x^2+ax+25$ пересекает ось абсцисс в двух различных точках. Выпишите интервалы знакопостоянства функции для одного из найденных значений a.

ПС—5

1. Вычислите $0{,}2^{\log_5\left(4+1+\frac{1}{4}+\ldots\right)}$.

2. Найдите сумму первых 20 членов последовательности, общий член которой выражается формулой $b_n=3n-1$.

3. При каких значениях x последовательность $\cos x$; $\sin x$; 1,5 является геометрической прогрессией?

ПС—6

1. Докажите тождество

$$\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha=2\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right).$$

Найдите наибольшее значение выражения $\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha$.

2. Упростите выражение

$$\frac{1-\sin(1{,}5\pi+2\alpha)+\sin 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}.$$

Укажите какое-нибудь значение α, при котором: а) данное выражение не имеет смысла; б) значение данного выражения отрицательно; в) значение данного выражения равно 2.

ПС—7

1. Решите уравнение:

а) $2-\cos x=2\sin^2 x$; б) $2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\sqrt{x}\right)+1=0$;

в) $\left(\sin x-\frac{1}{\sin x}\right)^2+\left(\cos x-\frac{1}{\cos x}\right)^2=1$.

2. Решите неравенство

$$\sin x\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos x\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\geqslant-0{,}5.$$

ПС—8

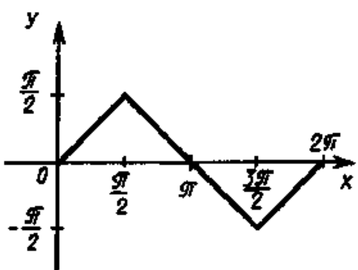

Рис. 15

1. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{4-x^2}+\log_3(1-x)$;

б) $y=\sqrt[4]{1-2\sin x}$.

2. На рисунке 15 изображен график нечетной функции $y=\arcsin(\sin x)$ на отрезке $[0;\ 2\pi]$. Начертите график этой функции на отрезке $[-2\pi;\ 0]$.

ПС—9

Постройте график функции:

а) $y=0,5x^2-2x$; б) $y=6\log_2\sqrt{x}+\log_2\frac{1}{x}$;

в) $y=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$.

ПС—10

1. Найдите скорость точки, движущейся прямолинейно по закону

$$s(t)=2t^3+4\sin(0,5\pi t),$$

в момент времени $t=1$ с, если путь s измеряется в сантиметрах.

2. Под каким углом к оси абсцисс наклонена касательная к графику функции $f(x)=0,5x^2+x-1,5$ в точке его с абсциссой $x_0=-2$? Напишите уравнение этой касательной и выполните рисунок к задаче.

ПС—11

1. Дана функция $f(x)=-2\sin x+5x$. Решите неравенство

$$f'(x)\leqslant f'(\pi).$$

2. Найдите $f'(x)$, если $f(x)=2\sqrt{x}+(2-0,5x)^2$. Сравните $f'(2)$ с нулем.

3. Решите неравенство $f'(x)<g'(x)$, если

$$f(x)=\frac{x^3+2}{x},\ g(x)=6x+\frac{2}{x}.$$

ПС—12

1. Решите неравенство:

а) $\frac{3x^4(x^2-9)}{2x^2+11}\geqslant 0$; б) $\frac{27-3^x}{4\cos x+5}\leqslant 0$.

2. Исследуйте функцию f и постройте ее график:

$$f(x)=\frac{2x^2-4x}{2x^2-4x+3}.$$

ПС — 13

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=\frac{3^x+3^{2-x}}{\ln 3}$$

на отрезке $[-1;\ 2]$.

2. Число 18 представьте в виде суммы трех положительных слагаемых так, чтобы одно слагаемое было в два раза больше другого, а произведение всех трех слагаемых было наибольшим.

ПС — 14

1. Для функции $f(x)=\frac{2}{\cos^2 x}-\sqrt{2}\sin x$ найдите первообразную $F(x)$, удовлетворяющую условию $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=\frac{1}{x}$, $y=0{,}5$, $x=1$;

б) $y=x^2-2x+4$ и $y=4$.

ПС — 15

1. Вычислите:

а) $4^{\log_2 6-0{,}5}$; б) $\log_4\log_{14}196+\log_5\sqrt{5}$.

2. Решите уравнение:

а) $\log_2(2^{2x}+16^x)=2\log_4 12$;

б) $\sqrt{(3x+4)(x-5)}+5=x$.

ПС — 16

1. Решите неравенство:

а) $\log_3^2 x<1$; б) $\log_4 x^2\cdot\log_4\frac{16}{x}\geqslant 2$.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3^y+x=10, \\ y-\log_3 x=2. \end{cases}$$

ПС — 17

1. Найдите промежутки возрастания, убывания и экстремум функции

$$y=3xe^{2-x}.$$

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=e^x,\ y=e,\ x=0.$$

ПС — 18

1. Вычислите:

а) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{2x+3}$; б) $\int\limits_2^{14} \frac{dx}{x\ln 7}$.

2. Докажите, что площади криволинейных трапеций, заштрихованных на рисунке 16, равны.

3. Составьте уравнение касательной к графику функции

$$f(x)=2\ln(x-1)$$

в точке его с абсциссой $x_0=3$. Выполните рисунок к задаче.

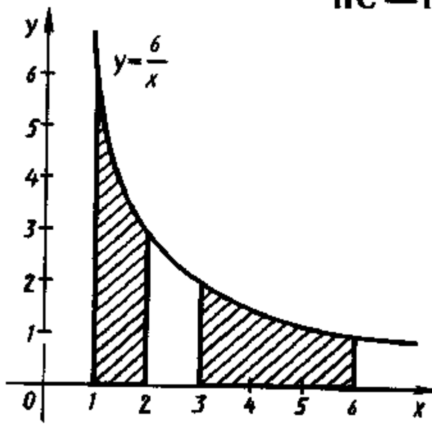

Рис. 16

Вариант 4

ПС —1

1. Упростите выражение:

а) $\sqrt{7+3\sqrt{5}}\cdot\sqrt{7-3\sqrt{5}}$; б) $\frac{6+\sqrt{2}}{6-\sqrt{2}}$.

2. Решите уравнение:

а) $x^5+243=0$; б) $x^6-64=0$; в) $\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-2=0$.

ПС —2

1. Дано квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$. Известно, что $a-b+c=0$. Назовите корни этого уравнения.

2. Решите неравенство

$$(x^2+x)^2>4.$$

3. Найдите двузначное число, зная, что число его единиц на 2 меньше числа его десятков, а произведение искомого числа и суммы его цифр равно 252.

ПС —3

1. Может ли числовое значение выражения

$$\frac{x^{1,8}-x^{1,5}}{x^{-0,2}-x^{-0,5}}-(0,09)^{-0,5}-\frac{2}{3}(x+3)^0$$

быть равным 5? Ответ объясните.

2. Решите уравнение

$$\frac{3x}{x+2}+\frac{x+2}{x-4}=\frac{36}{x^2-2x-8}.$$

ПС —4

1. Найдите корни уравнения $x^2-4|x|+3=0$, удовлетворяющие неравенству $|x+1|\leqslant 3{,}5$.

2. Найдите значения a, при которых парабола $y=x^2+ax+9$ пересекает ось абсцисс в двух различных точках. Выпишите интервалы знакопостоянства функции для одного из найденных значений a.

ПС —5

1. Вычислите $\left(\frac{1}{7}\right)^{\log_7\left(3+1+\frac{1}{3}+\dots\right)}$.

2. Найдите сумму первых 10 членов последовательности, общий член которой выражается формулой $b_n=\frac{1}{2^n}$.

3. При каких значениях x последовательность $3\sin x$, $\sin^2 x$, -1 является арифметической прогрессией?

ПС —6

1. Докажите тождество

$$\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right).$$

Найдите наименьшее значение выражения $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha$.

2. Упростите выражение

$$\frac{1-\cos 2\alpha-\sin 2\alpha}{\cos(1{,}5\pi+\alpha)-\cos\alpha}.$$

Укажите какое-нибудь значение α, при котором: а) данное выражение не имеет смысла; б) значение данного выражения положительно; в) значение данного выражения равно 2.

ПС —7

1. Решите уравнение:

а) $2-\sin x=2\cos^2 x$; б) $2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{x}\right)-\sqrt{3}=0$;

в) $3-2\sin(\pi+2x)=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$.

2. Решите неравенство

$$\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\geqslant-0{,}5.$$

ПС —8

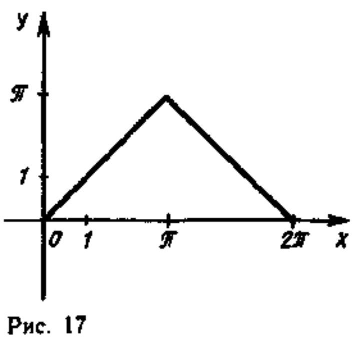

Рис. 17

1. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{x+2}+\lg(9-x^2)$;

б) $y=\sqrt[6]{1+2\cos 2x}$.

2. На рисунке 17 изображен график четной функции $y=\arccos(\cos x)$ на отрезке $[0;\ 2\pi]$. Начертите график этой функции на отрезке $[-2\pi;\ 0]$.

Постройте график функции: **ПС — 9**

а) $y=-0{,}5x^2+x$; б) $y=\log_{0,5}\frac{1}{x^3}+\log_{0,5}x^2$;

в) $y=3\sin(\pi-2x)$.

ПС — 10

1. Найдите скорость точки, движущейся прямолинейно по закону

$$s(t)=3t^2+4\cos(0{,}5\pi t)$$

в момент времени $t=2$ с, если путь s измеряется в сантиметрах.

2. Под каким углом к оси абсцисс наклонена касательная к графику функции

$$f(x)=-0{,}5x^2+x+1{,}5$$

в точке его с абсциссой $x_0=2$? Напишите уравнение этой касательной и выполните рисунок к задаче.

ПС — 11

1. Дана функция $f(x)=3\cos x+4x$. Решите неравенство

$$f'(x)\geqslant f'\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

2. Найдите $f'(x)$, если $f(x)=3\sqrt{x}+(2-0{,}5x)^4$. Сравните с нулем $f'(2)$.

3. Решите неравенство $f'(x)>g'(x)$, если

$$f(x)=8x+\frac{2}{x^2},\ g(x)=\frac{x^4+2}{x^2}.$$

1. Решите неравенство: **ПС — 12**

а) $\frac{6x^4(16-x^2)}{-3x^2-7}\geqslant 0$; б) $\frac{2^x-8}{3\sin x+4}\leqslant 0$.

2. Исследуйте функцию и постройте ее график:

$$f(x)=\frac{x^2+2x}{x^2+2x+3}.$$

ПС — 13

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=3^{2x}+2\cdot 3^{3-x}$$

на отрезке $[-1;\ 2]$.

2. Число 24 представьте в виде суммы трех положительных слагаемых так, чтобы одно слагаемое было в три раза больше другого, а произведение всех трех слагаемых было наибольшим.

ПС — 14

1. Для функции $f(x)=\frac{3}{\sin^2 x}+\sqrt{2}\cos x$ найдите первообразную $F(x)$, удовлетворяющую условию $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) $y=\frac{2}{x}$, $y=1$, $x=1$; б) $y=x^2+4x+5$ и $y=5$.

ПС — 15

1. Вычислите:
а) $9^{\log_3 4-0,5}$; б) $\log_4 \log_9 81+\log_3 \sqrt{3}$.
2. Решите уравнение:
а) $\log_3(25^x-2\cdot 5^x)=2\log_9 15$;
б) $\sqrt{(2x+3)(x-4)}+4=x$.

ПС — 16

1. Решите неравенство:
а) $\log_3^2 x<4$; б) $\log_3 x^2\cdot\log_3\frac{x}{9}\leqslant -2$.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases}2^x+y=5,\\ x-\log_2 y=2.\end{cases}$

ПС — 17

1. Найдите промежутки возрастания, убывания и экстремум функции

$$y=2xe^{x-1}.$$

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=e^{-x},\ y=e,\ x=0.$$

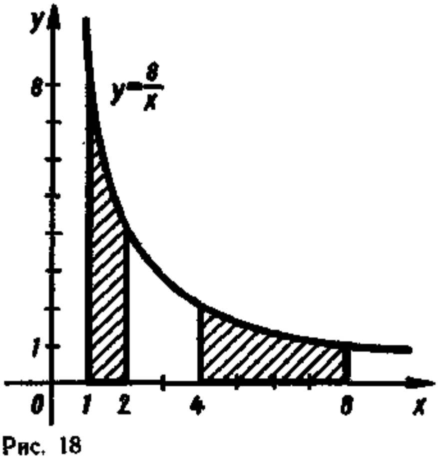

Рис. 18

ПС — 18

1. Вычислите:
а) $\int\limits_2^4 \frac{dx}{3x+4}$; б) $\int\limits_3^{15} \frac{dx}{x\ln 5}$.

2. Докажите, что площади криволинейных трапеций, заштрихованных на рисунке 18, равны.
3. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)=2\ln(x+1)$ в точке его с абсциссой $x_0=1$. Выполните рисунок к задаче.

ПС — 1

1. Вычислите $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$.

2. Рейку длиной 525 см разрезали на две части так, что первая из них оказалась короче второй на 25%. Найдите длину каждой части.

ПС — 2

1. Из 20-процентного раствора поваренной соли испарилось 25% имеющейся в растворе воды. Найдите концентрацию получившегося раствора.

2. Напишите уравнение прямой, параллельной прямой $y=1-3x$ и проходящей через точку $M(3;\ -1)$.

ПС — 3

1. Упростите выражение

$$\left(\frac{x^2}{x^2-\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}}{x^2+y^{0,5}}\right):\left(\frac{x^2+y^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{y}}-\frac{x^2-\sqrt{y}}{x}\right).$$

2. Решите уравнение

$$\frac{3y}{3y-2}+\frac{5}{3y+2}=\frac{8}{9y^2-4}.$$

ПС — 4

1. Для функции $y=6x^2+5x+1$ найдите множество значений переменной x, для которых $y\leqslant 0$, $y>0$.

2. Разложите (если это возможно) квадратный трехчлен $4x^2+20x+25$ на множители.

3. Запишите квадратное уравнение, корнями которого являются числа $-\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$.

ПС — 5

1. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (a_n), если известно, что $a_3=8$, $a_{11}=17$.

2. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии с первым членом $b_1=-\frac{3}{13}$ и знаменателем $q=\frac{2}{17}$.

3. Обратите в обыкновенную дробь бесконечную десятичную периодическую дробь 0,2 (142857).

ПС —6

1. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin 2\alpha+\cos(\pi+\alpha)}{\sin^2\alpha+\sin(\pi+\alpha)+1-\cos^2\alpha}$, найдите его значение при $\alpha=\dfrac{\pi}{8}$;

б) $\dfrac{\sin(x-\pi)\cos(x+2\pi)\sin(4\pi-x)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\operatorname{ctg}(2\pi-x)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)}$.

2. Докажите тождество:

а) $\dfrac{1-2\cos^2 2\alpha}{\frac{1}{2}\sin 4\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha$;

б) $\dfrac{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}=1+\sin\alpha$.

ПС —7

1. Решите уравнение:

а) $\sin 6x+\sin 2x=\sin 4x$;

б) $3\sin^2 x+\cos^2 x=2\sin 2x$.

2. Решите неравенство:

а) $\sin x\cos 2x>\cos x\sin 2x+\frac{1}{2}$; б) $\operatorname{tg}\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\geqslant\sqrt{3}$.

ПС —8

1. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{x^2-2x-15}+\log_3(-x)$; б) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}x-1}}$;

в) $y=\log_{\operatorname{tg}x}\sin x$.

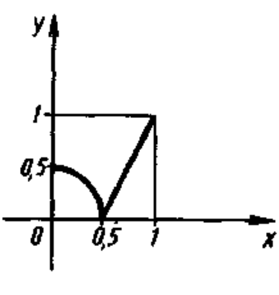

Рис. 19

2. Исследуйте функцию на четность и нечетность:

а) $f(x)=(x^2-1)(x^3+x)$;

б) $f(x)=\lg|x|-\log_2 x^4$;

в) $f(x)=\sqrt{x-3}$.

3. На рисунке 19 изображен график функции f на отрезке [0; 1]. Известно, что функция f четна и ее период равен 2. Постройте график функции f на отрезке [−4; 4].

ПС —9

Постройте схематически график функции f (без помощи производной), укажите ее области определения и значений, промежутки возрастания и убывания, максимумы и минимумы:

а) $f(x)=\frac{2}{x-3}$; б) $f(x)=x^2-2x+3$;

в) $f(x)=\cos 2x$; г) $f(x)=|\ln x|$.

ПС —10

1. Найдите производную функции:

а) $y=4x^4-2x^{\sqrt{5}}+\frac{1}{x}$; б) $y=(x-1)\cdot 2^x$; в) $y=\frac{x\ln x}{x-1}$.

2. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите производную функции

$$f(x)=\sin^2 3x.$$

3. Найдите решение дифференциального уравнения $y''=-4y$, удовлетворяющее условиям

$$y(0)=0,\ y'(0)=3.$$

ПС —11

1. Решите методом интервалов неравенство:

а) $\frac{(x-1)(x-3)^3}{(x+2)^2}\geqslant 0$; б) $\frac{(x-6)^2(x-3)^3}{\sqrt{x+1}}>0$;

в) $\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-4x+3}<0$.

2. Запишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^3$, параллельной прямой $y=3x+1{,}5$.

3. Материальная точка движется по прямой так, что ее координата в момент времени t равна $x(t)=t^2+\sin 2t$. Найдите действующую на нее силу в момент времени t, если масса точки равна 3 кг (x измеряется в метрах, t — в секундах).

ПС —12

1. Решите неравенство $f'(x)\leqslant g'(x)$, где

$$f(x)=x^2-x;\ g(x)=\ln|x|.$$

2. Найдите промежутки возрастания и убывания и экстремумы функции

$$f(x)=-x^4+2x^3+2.$$

Постройте ее график.

ПС — 13

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=x^4-\frac{8}{3}x^3+1$$

на промежутке $[-1;\ 3]$.

2. Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак емкостью V. При каком радиусе основания на изготовление бака уйдет наименьшее количество материала?

ПС — 14

1. Найдите общий вид первообразных для функции

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{5-2x}}+\sin 5x+1.$$

2. Для функции $f(x)=x^3+1-\frac{3}{\cos^2 2x}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M(0;\ -2)$.

3. Вычислите:

а) $\int\limits_0^{-\frac{\pi}{24}}\frac{2dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$; б) $\int\limits_{-3}^{2}\frac{2dx}{(3-x)^2}$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=6x-x^2,\ y=0.$$

ПС — 15

1. Упростите выражение

$$\lg\left(25^{\log_5 0,8}+9^{\log_3 0,6}\right).$$

2. Решите уравнение:

а) $\log_2(2x-1)+\log_2(x+5)=\log_2 13$;

б) $(0{,}25)^{x^2-4}=2^{x^2+1}$.

3. Решите неравенство

$$\lg(x^2-x)\leqslant\lg(3x-3).$$

ПС — 16

1. Решите уравнение:

а) $3^{\log_2^2 x - \log_2 x} = \left(\frac{1}{27}\right)^{\log_2 \frac{1}{x}}$; б $\log_3 (2x-5)^{\sqrt{x-2}} = \sqrt{x-2}$.

2. Решите неравенство $\lg^2 x + \lg x - 2 \leqslant 0$.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{13}{6}, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

ПС — 17

1. Найдите производную функции

$$f(x) = e^{x^2-1} + 2^x.$$

2. Найдите первообразную функции $y = 2^x + e^{-x}$, график которой проходит через точку $M(1; 2)$.

3. Найдите точки максимума и минимума функции

$$y = e^{3 \ln^2 x - 2 \ln^3 x}.$$

ПС — 18

1. Найдите производную функции:

а) $f(x) = \ln(3x-1) + \log_2(3x-1)$; б) $f(x) = (x+1)^{\sqrt{3}-1}$.

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = \frac{5}{x}$, $x + y = 6$; б) $y = x^{\sqrt{2}}$, $y = x^{\sqrt{5}}$.

3. Найдите решение дифференциального уравнения $y' = -2y$, удовлетворяющее условию $y(1) = e^4$.

ПС—1

1. Вычислите $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}-\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}-\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$.

2. Планку длиной 436 см распилили на две части так, что первая из них оказалась длиннее второй на 18%. Найдите длину каждой части.

ПС—2

1. Из 25-процентного раствора поваренной соли испарилась $\frac{1}{3}$ имеющейся в растворе воды. Найдите концентрацию получившегося раствора.

2. Напишите уравнение прямой, параллельной прямой $y=2+3x$ и проходящей через точку $M(2;\ -4)$.

ПС—3

1. Упростите выражение

$$\left(\frac{\sqrt{b}+c^2}{c^2}-\frac{\sqrt{b}-c^2}{b^{0.5}}\right):\left(\frac{b^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{b}-c^2}-\frac{c^2}{b^{0.5}+c^2}\right).$$

2. Решите уравнение $\frac{8}{2-3y}+\frac{3y}{3y+2}=\frac{8}{9y^2-4}$.

ПС—4

1. Для функции $y=8x^2-2x-1$ найдите множество значений переменной x, для которых $y<0$, $y\geqslant 0$.

2. Разложите (если это возможно) квадратный трехчлен $9x^2-10x+1$ на множители.

3. Запишите квадратное уравнение, корнями которого являются числа $-\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{5}$.

ПС—5

1. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (a_n), если известно, что $a_4=8$, $a_{13}=-5$.

2. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии с первым членом $b_1=-\frac{5}{17}$ и вторым членом $b_2=\frac{5}{19}$.

3. Обратите бесконечную десятичную дробь 0,4 (428571) в обыкновенную.

ПС—6

1. Упростите выражение:

а) $\dfrac{2-2\sin^2\alpha}{1-\cos 2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$, найдите его значение при $\alpha=\dfrac{3\pi}{8}$;

б) $\dfrac{\sin(\pi-x)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\operatorname{tg}\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg}(x-\pi)}$.

2. Докажите тождество:

а) $\dfrac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}=1$;

б) $1+\cos\alpha=\dfrac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$.

ПС—7

1. Решите уравнение:

а) $\cos 3x\operatorname{tg}x=0$; б) $3\sin x+\cos 2x=-1$.

2. Решите неравенство:

а) $\cos^2 x+\frac{1}{2}>\sin^2 x$; б) $\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\geqslant\sqrt{3}$.

ПС—8

1. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{x^2+2x-3}+\ln(5-x)$; б) $y=\sqrt{2\sin x-1}$;

в) $y=\log_{\operatorname{ctg}x}\cos x$.

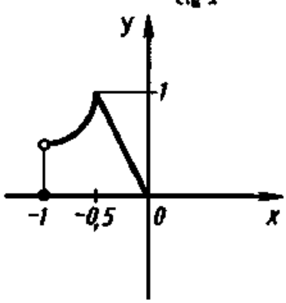

Рис. 20

2. Исследуйте функцию на четность и нечетность:

а) $f(x)=(x^2+1)(x^3-x^4)$;

б) $f(x)=\cos x^2+\sin|x|$;

в) $f(x)=3x^4\sin x\cos x$.

3. На рисунке 20 приведен график функции f на отрезке $[-1;\ 0]$. Известно, что функция f нечетна и что ее период равен 2. Постройте график функции f на отрезке $[-5;\ 5]$.

ПС—9

Постройте схематически график функции (без помощи производной). Найдите ее области определения и значений, промежутки возрастания и убывания, максимумы и минимумы:

а) $f(x)=\frac{3}{2-x}$; б) $f(x)=3-2x-x^2$;

в) $f(x)=\sin\frac{1}{2}x$; г) $f(x)=|\log_{\frac{1}{2}} x|$.

ПС—10

1. Найдите производную функции:

а) $y=5x^{\sqrt{3}}-4x^2-\frac{34}{x^2}$; б) $y=(x+1)\cdot 0{,}5^x$; в) $y=\frac{x\ln x}{1-x^2}$.

2. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите производную функции $f(x)=\cos^2\frac{x}{3}$.

3. Найдите решение дифференциального уравнения $y''=-9y$, удовлетворяющее условиям $y(0)=0$, $y'(0)=-2$.

ПС—11

1. Решите методом интервалов неравенство:

а) $\frac{(x+1)(x+3)^2}{(x+2)^3}\leqslant 0$; б) $\frac{(x-1)^3(x-2)^2}{\sqrt{x+3}}\geqslant 0$; в) $\frac{x^3-4x^2+3x}{x^2-5x+6}<0$.

2. Запишите уравнение касательной к графику функции

$$f(x)=\frac{x}{4+x^2},$$

параллельной прямой $4y=x-1$.

3. Материальная точка массой 2 кг движется по прямой так, что ее координата в момент времени t равна $x(t)=t^3+\cos t$. Найдите действующую на нее силу в момент времени t, если x измеряется в метрах, а время t — в секундах.

ПС—12

1. Решите неравенство $f'(x)>g'(x)$, где

$$f(x)=x^2+x;\ g(x)=\ln|x|.$$

2. Найдите промежутки возрастания и убывания и экстремумы функции

$$f(x)=x^4-2x^3.$$

Постройте ее график.

ПС—13

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=3x^5-20x^3+4$$

на промежутке $[-1; 3]$.

2. Требуется изготовить открытый цилиндрический бак емкостью V. При каком радиусе основания на его изготовление уйдет наименьшее количество материала?

ПС—14

1. Найдите общий вид первообразных для функции

$$f(x)=\frac{1}{\cos^2 2x}-\sqrt{2x-3}+2.$$

2. Для функции $f(x)=\sqrt{x}+\cos 2\pi x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M(1; 3)$.

3. Вычислите:

а) $\int\limits_0^{-\frac{\pi}{24}} \frac{dx}{\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$; б) $\int\limits_{-2}^{0} \frac{3dx}{(5+2x)^2}$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=3x-x^2,\ y=0.$$

ПС—15

1. Упростите выражение

$$\log_5(49^{\log_7 2}+(0,(2))^0).$$

2. Решите уравнение:

а) $\log_2(x^2+8)-\log_2(x-1)=\log_{0,5}\frac{1}{8}$;

б) $3^{\log_2^2 x-\log_2 x^8}=\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_2 \frac{1}{x}+4,5}$.

3. Решите неравенство

$$x^2\cdot 3^x-3^{x+1}\leqslant 0.$$

ПС—16

1. Решите уравнение:

а) $5^{2x-3}-2\cdot 5^{x-2}=3$; б) $\frac{x+3}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{3x+1}$.

2. Решите неравенство

$$\lg(x^2+2)>\lg(3x-7).$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy+x+y=-1, \\ x^2y+xy^2=-2. \end{cases}$$

ПС—17

1. Найдите производную функции

$$f(x)=e^{x^2+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}.$$

2. Найдите первообразную функции

$$f(x)=3^{-x}+e^x,$$

график которой проходит через точку $M(-1; 3)$.

3. Найдите точки максимума и минимума функции

$$y=e^{3\lg^2 x+2\lg^3 x}.$$

ПС—18

1. Найдите производную функции:

а) $f(x)=\ln(3x+1)+\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)$; б) $f(x)=(x-1)^{\sqrt{2}+1}$.

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=\frac{7}{x}$, $x+y=8$; б) $y=x^e$, $y=x^\pi$.

3. Найдите решение дифференциального уравнения $y'=-\frac{1}{3}y$, удовлетворяющее условию $y(-2)=e^2$.

ПС—1

1. Вычислите $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$.

2. В одном автопарке 250 машин, из них 24% составляют самосвалы, во втором автопарке 150 машин, из них 8% — самосвалы. Какой процент общего числа машин в обоих парках составляют самосвалы?

ПС—2

1. Стороны треугольника пропорциональны числам 3, 4, 5. Наибольшая сторона превосходит наименьшую на 3,6 см. Найдите периметр и площадь треугольника.

2. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 1{,}25x-0{,}12>0{,}3x+0{,}07, \\ 1-x\geqslant 0{,}5x-4. \end{cases}$$

ПС—3

1. Упростите выражение

$$\left(a^{\frac{1}{3}}+b+\frac{4b^2-a^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{a}-b}\right):\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2}-b^2}-\frac{2}{\sqrt[3]{a}+b}+\frac{1}{\sqrt[3]{a}-b}\right).$$

2. Решите уравнение

$$\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y+2}=\frac{2}{y^2-1}.$$

ПС—4

1. Для функции $y=5x^2+26x+5$ найдите множества значений переменной x, для которых $y\geqslant 0$, $y\leqslant 0$.

2. Разложите (если это возможно) квадратный трехчлен $2x^2-5x-1$ на множители.

3. Напишите квадратное уравнение, корнями которого являются числа $\sqrt{7}-1$ и $\sqrt{7}+1$.

ПС—5

1. Найдите число членов арифметической прогрессии (a_n), если известно, что $d=-3$, $a_1=2$, $S_n=-208$.

2. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии с первым членом 2 и третьим членом 0,5.

3. Обратите бесконечную десятичную дробь 0,1(076923) в обыкновенную.

ПС—6

1. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\dfrac{\cos(\pi+\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)-1}$; б) $\dfrac{\cos\alpha-2\sin 3\alpha-\cos 5\alpha}{\sin\alpha+2\cos 3\alpha-\sin 5\alpha}$.

2. Докажите тождество:

а) $\dfrac{2\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\sin\beta}=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$;

б) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)}{\cos\alpha+\sin 3\alpha}\,(\sin(\pi+\alpha)+\cos(\pi-\alpha))=-1$.

ПС—7

1. Решите уравнение:

а) $\sin 3x\operatorname{ctg}x=0$; б) $\sin 4x-\sin 2x=\sin x$.

2. Решите неравенство:

а) $-\sin 3x\sin 4x+\frac{1}{2}<\cos 3x\cos 4x$;

б) $\operatorname{tg}\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$.

ПС—8

1. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{x^2-6x+8}+\dfrac{1}{\log_5(4-x)-1}$;

б) $y=\sqrt{2\cos x-\sqrt{3}}$; в) $y=\log_x\sin x$.

2. Исследуйте функцию на четность и нечетность:

а) $f(x)=(x^5+1)(x+x^2)$; б) $f(x)=\sin^4 x+\cos 2x$;

в) $f(x)=|x|\sin x^3$.

3. Найдите наименьший положительный период функции:

а) $f(x)=\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$; б) $f(x)=\sin^2 x$; в) $f(x)=|\operatorname{tg}x|$.

ПС—9

1. Функция f является четной, периодической с периодом 2, убывающей на отрезке [0; 0,5], возрастающей на промежутке [0,5; 1), не определена в точке 1 (причем $f(x)$ стремится к 1 при x, стремящемся к 1), непрерывна на промежутке [0; 1), $f(0)=2$, $f(0{,}5)=0$. Изобразите схематически график этой функции на промежутке (— 5; 5).

2. Постройте схематически график функции (без помощи производной), найдите ее области определения и значений, промежутки возрастания и убывания, максимумы и минимумы:

а) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$; б) $f(x)=x^4-2x^2+1$; в) $f(x)=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x$.

ПС—10

1. Найдите производную функции:

а) $y=(\sqrt{2}\,x^4-2x^{\sqrt{2}})\sqrt{x+1}$; б) $y=\frac{e^x}{\ln x}$;

в) $y=\sin x+\cos\frac{x}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{x}{4}$.

2. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите производную функции

$$f(x)=(2x^3+3x^2)^{307}.$$

3. Запишите решение дифференциального уравнения $y''=-\frac{1}{4}y$, удовлетворяющее условиям

$$y(0)=2,\ y'(0)=1.$$

ПС—11

1. Решите методом интервалов неравенство:

а) $\frac{(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4}{x^3}\leqslant 0$; б) $\frac{\sqrt{x-1}\,(x-2)(x-3)^2}{(x+4)^2}\geqslant 0$;

в) $\frac{x}{x+1}>\frac{2x}{x+3}-\frac{1}{4}$.

2. Запишите уравнение касательной к графику функции

$$f(x)=2x^2-2x^3+5,$$

параллельной прямой $y=3-10x$.

3. Материальная точка массой 1 кг движется по прямой так, что ее координата в момент времени t равна $x(t)=2t^2-\frac{1}{t}-\ln|t|$. Найдите действующую на нее силу в момент времени t, если x измеряется в метрах, а t — в секундах.

ПС—12

1. Постройте график функции

$$f(x)=\max(z^3-3z)$$

на отрезке с концами 0 и x.

2. Найдите промежутки возрастания и убывания и экстремумы функции

$$f(x)=3x^5-5x^3+1.$$

Постройте график.

ПС—13

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=3x^4-8x^3+6x^2+5$$

на промежутке $(-2;\ 1)$.

2. В полушар радиуса 3 вписан конус так, что вершина конуса совпадает с центром полушара. При каком радиусе основания этот конус будет иметь наибольший объем?

ПС—14

1. Докажите, что функция $F(x)=x-\ln x^3$ является первообразной для функции $f(x)=\frac{x-3}{x}$ на промежутке $(0;\ \infty)$.

2. Найдите общий вид первообразных для функции

$$f(x)=x^{\sqrt{2}}-3x^3+\frac{1}{(x+2)^2}.$$

3. Вычислите:

а) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos\frac{3x}{2}+\sin\frac{3x}{2}\right)dx;$ б) $\int\limits_0^4 x^2\sqrt{x}\,dx.$

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=4+3x-x^2,\ y=x+1.$$

ПС—15

1. Упростите выражение

$$36^{\log_6 5}+10^{1-\lg 2}-3^{\log_9 36}.$$

2. Решите уравнение:

а) $\lg^2(2x-1)=\lg(x-0{,}5)+\lg 2$; б) $5^{\log_3^2 x-\log_3 x^3}=\frac{1}{25}$.

3. Решите неравенство $3^{x^2-x-3}\geqslant 27$.

ПС—16

1. Решите уравнение:

а) $2^{x+1}+0{,}5^{x-1}=5$; б) $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$.

2. Решите неравенство $\log_8(x^2-4x+3)<1$.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}(x-y)\,xy=30,\\(x+y)\,xy=120.\end{cases}$$

ПС—17

1. Найдите производную функции $f(x)=\sin x^{\cos x}$, пользуясь тождеством $\sin x^{\cos x}=e^{\cos x\ln\sin x}$ (при $\sin x>0$).

2. Найдите общий вид первообразных для функции

$$f(x)=(2x-1)\,e^{x^2-x}.$$

3. Найдите промежутки возрастания и убывания функции

$$f(x)=e^x-x-1$$

и докажите неравенство $e^x>x+1$ при $x>0$.

ПС—18

1. Найдите общий вид первообразных для функции

$$f(x)=(x-1)\,x^{\sqrt{2}}+e^{2x}+\frac{1}{2x}.$$

2. Постройте график функции:

а) $f(x)=2^{\log_2 x}$; б) $f(x)=2^{\lg x}$.

3. Запишите общий вид решений дифференциального уравнения

$$y'=-\sqrt{2}\,y.$$

Вариант 8

ПС—1

1. Вычислите

$$\sqrt{3-\sqrt{5}}\,(3+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{2}).$$

2. В первой стопке 150 тетрадей, из них 32% составляют тетради в клетку, во второй стопке 210 тетрадей, из них 20% составляют тетради в клетку. Какой процент составляют тетради в клетку от общего числа тетрадей?

ПС—2

1. Стороны треугольника пропорциональны числам 3, 4, 5. Наибольшая сторона меньше суммы двух других на 2,4 см. Найдите периметр и площадь треугольника.

2. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3{,}4x-(x+0{,}6)<0{,}6x, \\ 16{,}5+2{,}5(2x-2{,}4)\geqslant 1{,}5x. \end{cases}$$

ПС—3

1. Упростите выражение

$$\left(b^{\frac{1}{3}}-2a+\frac{4a^2-4\sqrt[3]{b^2}}{2a+\sqrt[3]{b}}\right):\left(\frac{2a}{b^{\frac{2}{3}}-4a^2}+\frac{2}{2a-b^{\frac{1}{3}}}-\frac{1}{2a+b^{\frac{1}{3}}}\right).$$

2. Решите уравнение

$$\frac{2}{2-y}=\frac{2}{y^2-1}+\frac{1}{y+1}.$$

ПС—4

1. Для функции $y=6x^2+37x+6$ найдите множества значений переменной x, для которых $y\leqslant 0$, $y\geqslant 0$.

2. Разложите (если это возможно) квадратный трехчлен $3x^2-4x-2$ на множители.

3. Напишите квадратное уравнение, корнями которого являются числа $\sqrt{6}-2$ и $\sqrt{6}+2$.

ПС—5

1. Найдите число членов арифметической прогрессии (a_n), если известно, что $a_1=48$, $a_2=44$, $S_n=300$.

2. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии (b_n), если известно, что $b_1=-9$, $b_5=-\frac{1}{9}$.

3. Обратите бесконечную десятичную дробь 0,2(153846) в обыкновенную.

ПС—6

1. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)+1}{1+\operatorname{ctg}\alpha}$;

б) $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cos\alpha-\sin^2(\pi-\alpha)\sin^2\alpha-$

$-\cos^2(\pi-\alpha)\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$.

2. Докажите тождество:

а) $\dfrac{2\sin 4\alpha\,(1-\operatorname{tg}^2 2\alpha)}{1+\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}=\sin 8\alpha$;

б) $\dfrac{\cos 2x+5\cos 3x+\cos 4x}{\sin 2x+5\sin 3x+\sin 4x}=\operatorname{ctg} 3x$.

ПС—7

1. Решите уравнение:

а) $\dfrac{\cos 2x-\sin 4x}{\sin 2x-1}=0$; б) $\sqrt{3}\sin 2x-6\cos^2 x=-3$.

2. Решите неравенство:

а) $\cos^2 x-\frac{1}{2}<\sin^2(\pi+x)$; б) $\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

ПС—8

1. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{3x^2+2x-1}+\frac{1}{\lg(2-x)-1}$;

б) $y=\sqrt{\sin^2 x-\frac{1}{2}}$; в) $y=\log_x \cos x$.

2. Исследуйте функцию на четность и нечетность:

а) $f(x)=(x^3+x)(x^4-x^2)$;

б) $f(x)=\frac{\operatorname{tg} x \sin |x|}{\cos x^2}$; в) $f(x)=\sqrt{x^2-3}$.

3. Найдите наименьший положительный период функции:

а) $f(x)=\sin\left(5x-\frac{\pi}{7}\right)$; б) $f(x)=\cos|x|$; в) $f(x)=|\operatorname{ctg} x|$.

ПС—9

1. Функция f является нечетной, периодической с периодом 4, убывающей на отрезке $[0; 1]$, возрастающей на промежутке $[1; 2)$, не определена в точке 2 (причем $f(x)$ стремится к 1 при x, стремящемся к 2), непрерывна на промежутке $[0; 2)$, $f(1)=-1$. Изобразите схематически график этой функции на промежутке $[-8; 8]$.

2. Постройте схематически график функции (без помощи производной), а также найдите ее области определения и значений, промежутки возрастания и убывания, максимумы и минимумы:

а) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$; б) $f(x)=x^4-8x^2+16$; в) $f(x)=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x$.

ПС—10

1. Найдите производную функции:

а) $y=(\sqrt{3}\,x^5-5x^{\sqrt{3}})\sqrt{x-1}$; б) $y=\frac{\ln x}{e^x}$;

в) $y=\sin 3x+\cos\frac{x}{3}-\operatorname{ctg}^2\frac{x}{3}$.

2. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите производную функции

$$f(x)=(3x^2-2x^3)^{119}.$$

3. Запишите решение дифференциального уравнения $y''=-\frac{1}{9}y$, удовлетворяющее условиям

$$y(0)=3,\ y'(0)=-1.$$

ПС—11

1. Решите методом интервалов неравенство:

а) $\frac{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}{x^4} \geqslant 0$; б) $\frac{\sqrt{x+1}\,(x-3)^2 x^3}{(x-1)^2} < 0$;

в) $\frac{x}{1-x} > \frac{2x}{3-x} + \frac{1}{4}$.

2. Запишите уравнение касательной к графику функции

$$f(x)=(x-1)^2(x-3)^2,$$

параллельной прямой $y=5-24x$.

3. Материальная точка массой 5 кг движется по прямой так, что ее координата в момент t равна $x(t)=t^3-\ln|2t|+t$. Найдите действующую на нее силу в момент времени t, если x измеряется в метрах, а t — в секундах.

ПС—12

1. Постройте график функции

$$f(x)=\max_{[x;\, x+1]}(z^3-3z).$$

2. Найдите промежутки возрастания и убывания и экстремумы функции

$$f(x)=10x^6-12x^5-15x^4+20x^3.$$

Постройте ее график.

ПС—13

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=4x^5-15x^4-3$$

на промежутке $(-1;\ 1)$.

2. В полушар радиуса 4 вписан цилиндр так, что плоскость основания цилиндра совпадает с плоскостью, ограничивающей полушар. Найдите высоту цилиндра, зная, что его объем наибольший.

ПС—14

1. Докажите, что функция $F(x)=x+\ln x^3$ является первообразной для функции $f(x)=\frac{x+3}{x}$ на промежутке $(0;\ \infty)$.

2. Найдите общий вид первообразных для функции

$$f(x)=x^{\sqrt{3}}-\sin(2x+1)-\frac{1}{(2x+1)^2}.$$

3. Вычислите:

а) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{8}}\left(\frac{\cos 4x}{2}+\frac{1}{4}\right)dx$; б) $\int\limits_{0}^{8}x\sqrt[3]{x}\,dx$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=-x^2+4,\ y=x^2-2x.$$

ПС—15

1. Упростите выражение

$$\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125} 8}\right)\cdot 49^{\log_7 2}.$$

2. Решите уравнение:

а) $\log_x 2+\log_2 x=3\frac{1}{3}$; б) $6^{\log_5^2 x-\log_5 x^4}=\sqrt{\left(\frac{1}{36}\right)^{-5}}$.

3. Решите неравенство

$$4^{-|x-5|}\leqslant 0{,}125.$$

ПС—16

1. Решите уравнение:

а) $5^x-0{,}2^{x-1}=4$; б) $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$.

2. Решите неравенство

$$\log_{0{,}3}(x^2-5x+7)>0.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}(x-y)\,x^2y^2=4,\\(x+y)\,x^2y^2=12.\end{cases}$$

ПС—17

1. Найдите производную функции $f(x)=\cos x^{\sin x}$, пользуясь тождеством $\cos x^{\sin x}=e^{\sin x \ln \cos x}$ (при $\cos x>0$).

2. Найдите общий вид первообразных для функции

$$f(x)=(3x^2+1)\,e^{x^3+x}.$$

3. Найдите промежутки возрастания и убывания функции

$$f(x)=2^x-x\ln 2-1$$

и докажите неравенство $2^x>x\ln 2+1$ при $x>0$.

ПС—18

1. Найдите общий вид первообразных для функции

$$f(x)=(x+1)\,x^{\sqrt{3}}+e^{0,5x}+\frac{2}{x}.$$

2. Постройте график функции:

а) $f(x)=\log_{\frac{1}{x}} x$; б) $f(x)=2^{|\log_2 x|+1}$.

3. Запишите общий вид решений дифференциального уравнения

$$y'=\frac{y}{\sqrt{3}}.$$

ПС—1

1. Проверьте равенство

$$\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}-\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}=2\sqrt{2}.$$

2. Хозяйка налила в дырявый бидон керосин. Сколько керосина (в процентах) вылилось из бидона за 1 ч, если через 3 ч в нем осталось на 19% меньше того количества керосина, которое в нем было через 1 ч после наполнения?

3. Упростите выражение и вычислите его значение при $x=5$:

$$\frac{x^2+2x-3+(x+1)\sqrt{x^2-9}}{x^2-2x-3+(x-1)\sqrt{x^2-9}}.$$

ПС—2

1. Синусы углов треугольника пропорциональны числам 5, 12, 13. Найдите периметр и площадь этого треугольника, если радиус описанной около него окружности равен 6,5 см.

2. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} x^2+x-1\geqslant -1-4x-x^2, \\ |x|<6. \end{cases}$$

ПС—3

1. Упростите выражение

$$\frac{4a^{0,25}+bc^{1,5}}{(4+c^{1,5})(a^{0,25}-b)}+\frac{a^{\frac{1}{4}}c^{\frac{3}{2}}-4b}{(4-c^{1,5})(\sqrt[4]{a}-b)}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{1}{2-y^2}=\frac{2}{y^4-1}+\frac{1}{y^2+1}.$$

ПС—4

1. Разложите (если это возможно) многочлен $3x^4-10x^2+3$ на множители.

2. При каких значениях параметра b ($b\neq 0$) оба корня квадратного уравнения $2b^2x^2-bx-1=0$ по модулю меньше 1?

3. Найдите сумму четвертых степеней корней уравнения

$$x^2+x-1=0.$$

ПС—5

1. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 6, а их произведение равно $\frac{135}{16}$. Найдите сумму первых 15 членов этой прогрессии.

2. Найдите сумму

$$1+11+111+\ldots+\underbrace{111\ldots11}_{1991\ \text{раз}}.$$

3. Найдите сумму

$$1+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\ldots+p\cdot 2^{p-1}.$$

ПС—6

1. Упростите выражение:

а) $2(\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)^2-\sin^8\alpha-\cos^8\alpha$;

б) $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}$.

2. Докажите тождество

$$\frac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha.$$

3. Известно, что $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Докажите, что

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

ПС—7

1. Решите уравнение:

а) $(\sin x+\sqrt{3}\cos x)\sin 4x=2$; б) $\cos\frac{x}{5}\cos\frac{2x}{5}\cos\frac{4x}{5}=\frac{1}{8}$.

2. Решите неравенство:

а) $2\operatorname{tg}2x\leqslant 3\operatorname{tg}x$; б) $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\cos(\pi x)\right)\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ПС—8

1. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{-6\sin^2 x+5\sin x-1}$;

б) $y=\log_2\log_4\log_8 x$; в) $y=\log_{\sin x}\cos 2x$.

2. Исследуйте функцию на четность и нечетность:

а) $f(x)=\cos^2 x-\operatorname{tg}x^4$; б) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$;

в) $f(x)=\operatorname{tg}\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}\operatorname{tg}x$.

3. Известно, что функция f нечетна и возрастает на промежутке $[0;\ \infty)$. Решите неравенство

$$|f(x)|\geqslant f(3).$$

ПС—9

1. По данному графику функции f (рис. 21) постройте графики функций:

а) $y=f(x)+2$; б) $y=f(x-1)$;
в) $y=f(3x-1)+2$;
г) $y=|f(x)|$; д) $y=f(|x|)$;
е) $y=|f(-|x|)|$.

2. Постройте график функции:

а) $y=2^{\log_2(|x|-1)}$;

б) $y=\log_{|x|} 2$;

в) $y=\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|$;

г) $y=\arcsin(\sin x)$.

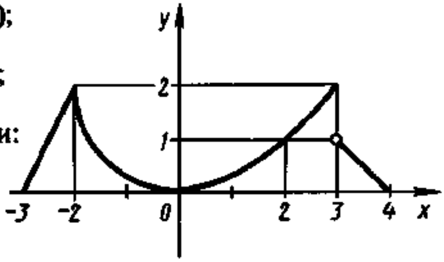

Рис. 21

ПС—10

1. Найдите производную функции:

а) $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ в точке 0 (если $f(0)=0$);

б) $y=\lg(x^{\sqrt{3}}+2x^{-1})^5$; в) $y=\left(\frac{x}{2}\right)^x$.

2. По эскизу графика функции f, изображенному на рисунке 22, постройте эскиз графика f'.

3. Пусть y_1 и y_2 — два решения дифференциального уравнения $y''=-2y$. Докажите, что функция $3y_1+\frac{1}{4}y_2$ также является решением этого дифференциального уравнения.

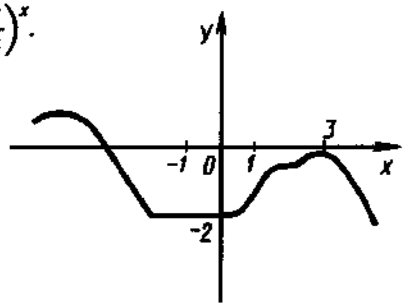

Рис. 22

ПС—11

1. Решите методом интервалов неравенство:

а) $x^4+3x^3+2x^2+3x+1<0$;

б) $4x^2-12x\sqrt{1-x}<27(1-x)$; в) $\frac{\operatorname{tg}^2 x-3}{\operatorname{tg} x(1-\operatorname{tg}^2 x)}\geqslant 0$.

2. Запишите уравнения касательных к графику функции

$$f(x)=x^2-2x+2,$$

проходящих через точку $M(4;\ 1)$.

ПС—12

1. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремумов функции

$$f(x)=\frac{x^3-x^2}{e^{-x}}.$$

2. Постройте график функции

$$f(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1},$$

предварительно исследовав ее с помощью производной. Запишите уравнение касательной к графику в точке с абциссой $x_0=-2$.

ПС—13

1. В каких пределах изменяются значения функции

$$f(x)=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x,$$

если $x\in[0;\ \pi]$?

2. Найдите отношение высоты к радиусу основания цилиндра, который при заданном объеме имеет наименьшую полную поверхность.

ПС—14

1. Найдите первообразную для функции $f(x)=e^x\sin x$, пользуясь формулами производных функций

$$f(x)=e^x\sin x \text{ и } h(x)=e^x\cos x.$$

2. Вычислите интеграл:

а) $\int\limits_{-2}^{14}\sqrt[3]{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2}\,dx$; б) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos x\cos 2x\,dx$.

3. Докажите, что для четной функции f справедливо равенство

$$\int\limits_{-a}^{0}f(x)\,dx=\int\limits_{0}^{a}f(x)\,dx.$$

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=x^2,\ y=4x-4,\ x=0.$$

ПС—15

1. Упростите выражение $a^{\frac{\log_b \log_b N}{\log_b a}}$.

2. Решите уравнение:

а) $\log_{10} x+\log_{\sqrt{10}} x+\log_{\sqrt[3]{10}} x+\ldots+\log_{\sqrt[10]{10}} x=5{,}5$;

б) $3^x+\log_2 x=10$.

3. Решите неравенство $3^{\lg x+2}<3^{\lg x^2+5}-2$.

ПС—16

1. Решите уравнение:

а) $2\lg(\lg x)=\lg(3-2\lg x)$; б) $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x+3}=0$.

2. Решите неравенство

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}(x^2-5x+8)}\leqslant 2{,}5.$$

3. Решите систему

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{xy+21}=13,\\ \sqrt[4]{x+y}+\sqrt[4]{xy+21}=5,\\ xy>0.\end{cases}$$

ПС—17

1. Запишите дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $y=4^x$.

2. Выведите формулу производной функции $f(x)=g(x)^{h(x)}$, пользуясь равенством $g(x)=e^{\ln g(x)}$.

3. Докажите, что первообразная для функции $f(x)=P_4(x)e^x$, где $P_4(x)$ — многочлен степени не выше 4, можно найти по формуле

$$F(x)=e^x(P_4(x)-P_4'(x)+P_4''(x)-P_4'''(x)+P_4^{(IV)}(x)).$$

ПС—18

1. Докажите неравенство $\ln(1+x)<x$ при $x>0$, предварительно исследовав функцию

$$f(x)=x-\ln(1+x).$$

2. Найдите первообразную для функции $f(x)=\frac{\ln 2+\ln x}{x}+x^x$ на промежутке $(0;\infty)$, предварительно выяснив, для какой функции является первообразной функция $F_1(x)=\ln^2 x$.

3. Тело проходит 45 м за 3 с, а 90 м за 6 с. Найдите зависимость координаты от времени, если известно, что скорость тела пропорциональна координате.

ПС—1

1. Проверьте равенство

$$\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}-\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\sqrt{20-4\sqrt{5}}.$$

2. Из сосуда испарялась вода. Сколько воды (в процентах) испаряется из сосуда в день, если через 4 дня в нем оставалось на 48,8% меньше того количества, которое в нем было через день?

3. Упростите выражение и найдите его значение при $t=5{,}2$:

$$\frac{t^2-t-6-(t+3)\sqrt{t^2-4}}{t^2+t-6-(t-3)\sqrt{t^2-4}}.$$

ПС—2

1. Синусы углов треугольника пропорциональны числам 12, 35, 37. Найдите периметр и площадь этого треугольника, если радиус описанной около него окружности равен 18,5 см.

2. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} x^2+x+1>-2-9x-2x^2, \\ |x|<4. \end{cases}$$

ПС—3

1. Упростите выражение

$$\frac{a^{\frac{1}{3}}c^2-3b^{\frac{1}{2}}}{(c^2+3)(a^{\frac{1}{3}}+\sqrt{b})}+\frac{3a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{2}}c^2}{(c^2-3)(a^{\frac{1}{3}}+\sqrt{b})}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{1}{y^2-1}+\frac{2}{y^2+2}=\frac{2}{y^4-1}.$$

ПС—4

1. Разложите (если это возможно) многочлен $2x^4+5x^2+2$ на множители.

2. При каких значениях параметра b ($b\neq0$) оба корня квадратного уравнения

$$2b^2x^2-bx-3=0$$

по модулю не превосходят 1?

3. Найдите сумму четвертых степеней корней уравнения

$$x^2-2x-2=0.$$

ПС—5

1. Произведение третьего и шестого членов арифметической прогрессии равно 406. При делении девятого члена этой прогрессии на ее четвертый член в частном получается 2, а в остатке 6. Найдите первый член и разность прогрессии.

2. Найдите сумму $3+33+...+\underbrace{333...33}_{1992\text{ раза}}$.

3. Найдите сумму

$$1+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+...+p\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{p-1}.$$

ПС—6

1. Упростите выражение

а) $\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}...\cos\frac{\alpha}{2^n}$, $\alpha\neq 2^n k\pi$, $k\in Z$;

б) $\dfrac{-\sin 47^\circ-\sin 61^\circ+\sin 11^\circ+\sin 25^\circ}{\cos 7^\circ}$.

2. Докажите тождество

$$\operatorname{cosec}\alpha+\operatorname{cosec}2\alpha+\operatorname{cosec}4\alpha+...+\operatorname{cosec}2^n\alpha=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}2^n\alpha.$$

3. Известно, что $3\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)$. Докажите, что $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=2\operatorname{tg}\alpha$.

ПС—7

1. Решите уравнение

а) $\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$;

б) $2\sin 7x+\sqrt{3}\cos 3x+\sin 3x=0$.

2. Решите неравенство:

а) $\cos x-\sin x-\cos 2x>0$; б) $\sqrt{5-2\sin x}\geqslant 6\sin x-1$.

ПС—8

1. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{8\cos^2 x-6\cos x+1}$; б) $y=\log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{4}}\log_{\frac{1}{8}}x$;

в) $y=\log_{\cos x}\sin 2x$.

2. Исследуйте функцию на четность и нечетность:

а) $f(x)=\operatorname{tg}^3 x-\sin x^5$; б) $f(x)=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$;

в) $f(x)=\sin\cos x-\cos\sin x$.

3. Известно, что функция f четна, убывает и положительна на промежутке $[0;\ \infty)$. Решите неравенство $|f(x)|<f(2)$.

ПС—9

По данному графику функции f (рис. 23) постройте график функции:

а) $y=f(x)-3$; б) $y=f(x+2)$;
в) $y=f(2x-1)+1$; г) $y=|f(x)|$;
д) $y=f(|x|)$; е) $y=|f(-|x|)|$.

2. Постройте график функции:

а) $y=3^{\log_{\frac{1}{3}}(|x+1|-1)}$;

б) $y=\log_{x^2}\frac{1}{2}$;

в) $y=\left|\cos x+\frac{1}{2}\right|$;

г) $y=\arccos(\cos x)$.

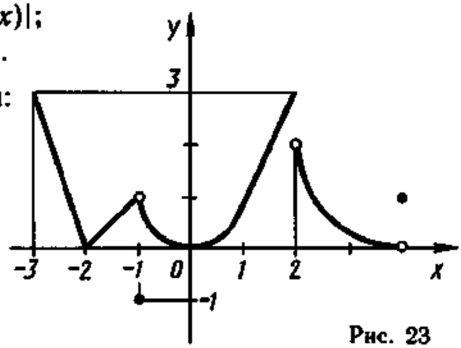

Рис. 23

ПС—10

1. Найдите производную функции:
а) $y=x|x|$ в точке 0;
б) $y=2^{(x-1)^{15}}$; в) $y=\ln x^{\ln x}$.

2. По эскизу графика функции f (рис. 24) постройте эскиз графика f'.

3. Пусть y_1 и y_2 — два решения дифференциального уравнения $y''=-\frac{1}{2}y$. Докажите, что функция $\frac{1}{3}y_1-4y_2$ тоже является решением этого дифференциального уравнения.

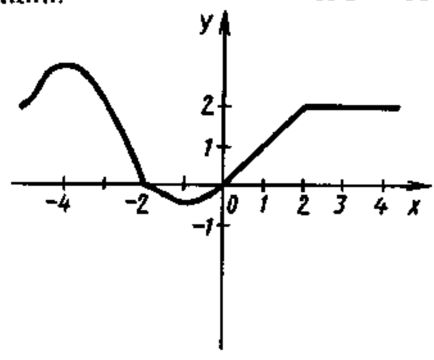

Рис. 24

ПС—11

1. Решите методом интервалов неравенство:

а) $\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x+3}<\frac{3}{x+4}$; б) $4x^2+12x\sqrt{1+x}<27(1+x)$;

в) $\frac{(\operatorname{tg}^2 x-1)\operatorname{tg} x}{3-\operatorname{tg}^2 x}\leqslant 0$.

2. Запишите уравнения касательных к графику функции
$$f(x)=x^2-2x-3,$$
проходящих через точку $M(-1;\ -4)$.

ПС—12

1. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремумов функции

$$f(x)=\frac{2\ln^2 x+3\ln x}{x}.$$

2. Постройте график функции $f(x)=\frac{x^2+5}{x^2-1}$, предварительно исследовав ее с помощью производной. Напишите уравнение касательной к графику в точке с абсциссой $x_0=2$.

ПС—13

1. В каких пределах меняются значения функции

$$f(x)=\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin 2x,$$

если $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{3}\right]$?

2. Найдите отношение высоты к радиусу основания конуса, который при заданном объеме имеет наименьшую площадь боковой поверхности.

ПС—14

1. Найдите первообразную для функции $f(x)=e^x\cos x$, пользуясь формулами производных функций

$$g(x)=e^x\sin x \text{ и } f(x)=e^x\cos x.$$

2. Вычислите интеграл:

а) $\int\limits_0^{-4}\sqrt{(4-3x)^3}\,dx$; б) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin x\sin 2x\,dx$.

3. Докажите, что для нечетной функции f справедливо равенство

$$\int\limits_{-a}^{a}f(x)\,dx=0.$$

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=x^3,\ y=-x^2+4x+4,\ x\geqslant-1.$$

ПС—15

1. Упростите выражение

$$2^{\sqrt{\log_2 x}} - x^{\sqrt{\log_x 2}} \quad (x>1).$$

2. Решите уравнение:

а) $2^{-|x|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|x+1| + |x-1|)$; б) $2^x + \log_3 x = 9$.

3. Решите неравенство

$$\log_{\cos^2 x} \sin x > 1.$$

ПС—16

1. Решите уравнение:

а) $2\log_5(\lg x) = \log_5(10 - 9\lg x)$;

б) $\sqrt{3x^2-2x+15} + \sqrt{3x^2-2x+8} = 7$.

2. Решите неравенство

$$0{,}5^{\sqrt{3}} < 0{,}5^{\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}} \leqslant 0{,}5.$$

3. Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}} + \sqrt{\dfrac{2x}{3x-2y}} = 2, \\ x^2 - 18 = 2y(4y-9). \end{cases}$$

ПС—17

1. Запишите дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $y = 3^{-2x}$.

2. Докажите неравенство $e^{-x} > 1 - x$ при $x > 0$, предварительно исследовав функцию $f(x) = e^{-x} + x - 1$.

3. Докажите, что первообразную для функции $f(x) = P_3(x)e^{-x}$, где $P_3(x)$ — многочлен степени не выше 3, можно найти по формуле

$$F(x) = e^{-x}(-P_3(x) - P_3'(x) - P_3''(x) - P_3'''(x)).$$

ПС—18

1. Выведите формулу для производной функции $f(x) = \log_{g(x)} h(x)$, пользуясь формулой перехода к натуральным логарифмам.

2. Найдите область значений функции $y = x^{\frac{1}{x}}$ $(x>0)$.

3. Тело проходит 15 м за 5 с, а 60 м за 10 с. Найдите зависимость пути от времени, если известно, что скорость тела пропорциональна пройденному пути.

ПРИМЕРНЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Контрольная работа № 1

Вариант 1

1. Докажите, что функция $F(x)=\frac{1}{3}-\frac{1}{x}$ есть первообразная для функции $f(x)=\frac{1}{x^2}$ на промежутке $(0;\ \infty)$.

2. Для функции $f(x)=4\sin x$ найдите: а) множество всех первообразных; б) первообразную, график которой проходит через точку $A\left(\frac{\pi}{2};\ 0\right)$.

3. Вычислите $\int\limits_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx$.

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=0{,}5x^2$, $y=0$, $x=3$; б) $y=0{,}5x^2$, $y=0{,}5$, $x=2$.

5*. Необязательное задание. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=2\sin x,\ y=-\sin x,\ 0\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}.$$

Вариант 2

1. Докажите, что функция $F(x)=\frac{4}{x}-\frac{1}{3}$ есть первообразная для функции $f(x)=-\frac{4}{x^2}$ на промежутке $(0;\ \infty)$.

2. Для функции $f(x)=8\cos x$ найдите: а) множество всех первообразных; б) первообразную, график которой проходит через точку $A\ (\pi;\ 0)$.

3. Вычислите $\int\limits_1^9 \frac{6x}{\sqrt{x^3}}\,dx$.

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=2x^2$, $y=0$, $x=2$; б) $y=2x^2$, $y=2$, $x=2$.

5*. Необязательное задание. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\sin x,\ y=-2\sin x,\ 0\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}.$$

Вариант 3

1. Докажите, что функция $F(x)=\frac{x}{2}-\frac{3}{x}$ есть первообразная для функции $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{3}{x^2}$ на промежутке $(-\infty;\ 0)$.

2. Для функции $f(x)=2\sin 3x$ найдите: а) множество всех первообразных; б) первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{3};\ 0\right)$.

3. Вычислите $\int\limits_1^4 \frac{3x^{2,5}}{\sqrt{x}}\,dx$.

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=-x^2+4$, $y=0$; б) $y=-x^2+4$, $y=3$.

5*. Необязательное задание. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=2\cos^2\frac{x}{2}+1,\ y=0,\ x=0,\ x=\pi.$$

Вариант 4

1. Докажите, что функция $F(x)=\frac{x}{3}+\frac{4}{x}$ есть первообразная для функции $f(x)=\frac{1}{3}-\frac{4}{x^2}$ на промежутке $(-\infty;\ 0)$.

2. Для функции $f(x)=3\cos 2x$ найдите: а) множество всех первообразных; б) первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{4};\ 0\right)$.

3. Вычислите $\int\limits_1^9 \frac{6x^{0,25}}{\sqrt{x^{1,5}}}\,dx$.

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=-x^2+3$, $y=0$; б) $y=-x^2+3$, $y=2$.

5*. Необязательное задание. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=2\sin^2\frac{x}{2}+1,\ y=0,\ x=0,\ x=\pi.$$

Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. Найдите значение выражения

$$\sqrt[4]{7-\sqrt{33}}\cdot\sqrt[4]{7+\sqrt{33}}.$$

2. Сократите дробь

$$\frac{a-b}{ab^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b}.$$

3. Решите уравнение:

а) $8x^3-1=0$; б) $\sqrt{3x-2}=4-x$.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-y=8, \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=2. \end{cases}$$

5*. Необязательное задание. Решите уравнение

$$\sqrt{2-2{,}5\sin x}=\cos x.$$

Вариант 2

1. Найдите значение выражения

$$\sqrt[6]{9-\sqrt{17}}\cdot\sqrt[6]{9+\sqrt{17}}.$$

2. Сократите дробь

$$\frac{a-b^2}{a-a^{\frac{1}{2}}b}.$$

3. Решите уравнение:

а) $27x^3+1=0$; б) $\sqrt{3x+1}=x-1$.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-y=21, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=7. \end{cases}$$

5*. Необязательное задание. Решите уравнение

$$\sqrt{2-2{,}5\cos x}=\sin x.$$

Вариант 3

1. Найдите значение выражения

$$\sqrt[4]{\sqrt{95}-\sqrt{14}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{95}+\sqrt{14}}.$$

2. Сократите дробь

$$\frac{a-b}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}.$$

3. Решите уравнение:

а) $16x^4-1=0$; б) $\sqrt{2x^2-3x+2}=2x-2$.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=97, \\ \sqrt{xy}=6. \end{cases}$$

5*. Необязательное задание. Решите методом интервалов неравенство $\sqrt{x+2}-x>0$.

Вариант 4

1. Найдите значение выражения

$$\sqrt[6]{\sqrt{75}+\sqrt{11}}\cdot\sqrt[6]{\sqrt{75}-\sqrt{11}}.$$

2. Сократите дробь

$$\frac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}.$$

3. Решите уравнение:

а) $64x^6-1=0$; б) $\sqrt{2x^2+5x+4}=2x+2$.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=13, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5. \end{cases}$$

5*. Необязательное задание. Решите методом интервалов неравенство $\sqrt{2-x}-x>0$.

Контрольная работа № 3 (на 20 минут)

Вариант 1

1. Постройте график функции $y=3^x$. Как изменяется y, когда x возрастает от -1 до 3?

2. Решите уравнение:

а) $8^{-2}\cdot 2^x=4$; б) $2^x+3\cdot 2^{x-3}=22$.

3. Решите неравенство

$$3^{x^2-4}\leqslant 243.$$

4*. Необязательное задание. Решите уравнение

$$3^{|\sin x-1|}=9.$$

Вариант 2

1. Постройте график функции $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$. Как изменяется y, когда x возрастает от -1 до 3?

2. Решите уравнение:

а) $27^{-1}\cdot 3^{2x}=81$; б) $2\cdot 3^x+3^{x-2}=57$.

3. Решите неравенство

$$2^{x^2-1}\geqslant 8.$$

4*. Необязательное задание. Решите уравнение

$$2^{|\cos x-2|}=8.$$

Вариант 3

1. Постройте график функции $y=4^x$. Как изменяется y, когда x возрастает от -2 до 2?

2. Решите уравнение:

а) $\sqrt{5}\cdot 5^{3x}=\frac{1}{5}$; б) $4^x-3\cdot 4^{x-2}=52$.

3. Решите неравенство

$$(0{,}3)^{x^2-2x+2}\leqslant 0{,}09.$$

4*. Необязательное задание. Решите уравнение

$$2^{|x-1|}=0{,}5^{1-x}.$$

Вариант 4

1. Постройте график функции $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$. Как изменяется y, когда x возрастает от -2 до 2?

2. Решите уравнение:

а) $\sqrt{3}\cdot 3^{2x}=\frac{1}{9}$; б) $5^x-7\cdot 5^{x-2}=90$.

3. Решите неравенство

$$(1{,}3)^{x^2-4x+2}\leqslant 1{,}69.$$

4*. Необязательное задание. Решите уравнение

$$5^{|x+1|}=(0{,}2)^{-x-1}.$$

Контрольная работа № 4

Вариант 1

1. Постройте график функции $y=\log_3 x$. Как изменяется y, когда x возрастает от $\frac{1}{3}$ до 27?

2. Решите уравнение:

а) $\log_{0,5}(x^2-3x)=-2$; б) $\log_2\sqrt{x}-\log_2\frac{1}{x}=3$.

3. Решите неравенство

$$\log_4(x+1)<-0{,}5.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\log_4 x+\log_4 y=1,\\ y-2x=7.\end{cases}$$

5*. Необязательное задание. Решите методом интервалов неравенство

$$\frac{\log_2(3-x)}{x}\geqslant 0.$$

Вариант 2

1. Постройте график функции $y=\log_{\frac{1}{3}} x$. Как изменяется y, когда x возрастает от $\frac{1}{3}$ до 27?

2. Решите уравнение:

а) $\log_{0,2}(x^2+4x)=-1$; б) $\log_3\frac{1}{x}+\log_3\sqrt{x}=-1$.

3. Решите неравенство $\log_{0,5}(x-1)>-2$.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\log_3 x+\log_3 y=1,\\ y-3x=8.\end{cases}$$

5*. Необязательное задание. Решите методом интервалов неравенство

$$\frac{\log_{0,5}(x+3)}{x}\geqslant 0.$$

Вариант 3

1. Постройте график функции $y=\log_{0,5}x$. Как изменяется y, когда x возрастает от $\frac{1}{4}$ до 8?

2. Решите уравнение:

а) $\log_{\frac{1}{4}}(x^2+6x)=-2$; б) $\log_2\frac{8}{x}-\log_2\sqrt{2x}=-0{,}5$.

3. Решите неравенство $\lg^2 x-\lg x>0$.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=2,\\ x-4y=15.\end{cases}$$

5*. Необязательное задание. Решите методом интервалов неравенство $\frac{\log_{0,4}(x-2)}{x-6}\leqslant 0$.

Вариант 4

1. Постройте график функции $y=\log_4 x$. Как изменяется y, когда x возрастает от $\frac{1}{4}$ до 16?

2. Решите уравнение:

а) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+8x)=-2$; б) $\log_5\frac{25}{x}+\log_5\sqrt{5x}=2$.

3. Решите неравенство

$$\lg^2 x+\lg x<0.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\log_{0,5}x+\log_{0,5}y=-1,\\ x-2y=3.\end{cases}$$

5*. Необязательное задание. Решите методом интервалов неравенство

$$\frac{\log_3 (8-x)}{4-x} \leqslant 0.$$

Контрольная работа № 5

Вариант 1

1. а) Дана функция $f(x)=e^x \cos x$. Найдите $f'(x)$, $f'(0)$.

б) Дана функция $\varphi(x)=\frac{1}{6} \ln(-2x)$. Найдите $\varphi'(x)$, $\varphi'\left(-\frac{1}{8}\right)$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=e^x, \ y=1, \ x=2.$$

3. Исследуйте на возрастание (убывание) и на экстремумы функцию

$$f(x)=2x \ln x.$$

4*. Необязательное задание. Решите неравенство $f'(t)>\varphi'(t)$, если $f(t)=4^t$, $\varphi(t)=2^{t+1}$.

Вариант 2

1. а) Дана функция $f(x)=e^x \sin x$. Найдите $f'(x)$, $f'(0)$.

б) Дана функция $\varphi(x)=\frac{1}{6} \ln(-3x)$. Найдите $\varphi'(x)$, $\varphi'\left(-\frac{1}{9}\right)$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\frac{1}{x}, \ y=1, \ x=4.$$

3. Исследуйте на возрастание (убывание) и на экстремумы функцию

$$f(x)=x \cdot e^x.$$

4*. Необязательное задание. Решите неравенство $f'(t)<\varphi'(t)$, если $f(t)=9^{t-1}$, $\varphi(t)=2\cdot 3^t$.

Вариант 3

1. а) Дана функция $f(x)=2^x \cos x$. Найдите $f'(x)$, $f'(0)$.

б) Дана функция $\varphi(x)=6 \ln\left(\frac{1}{2}x\right)$. Найдите $\varphi'(x)$, $\varphi'\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=e^{-x}, \ y=1, \ x=-2.$$

3. Исследуйте на возрастание (убывание) и на экстремумы функцию

$$f(x)=\frac{2 \ln x}{x}.$$

4*. Необязательное задание. Найдите наименьшее значение функции $f(x)=\frac{1}{\ln 3}(3^x+3^{-x})$ на отрезке $[-2; 2]$.

Вариант 4

1. а) Дана функция $f(x)=3^x \sin x$. Найдите $f'(x)$, $f'(0)$.

б) Дана функция $\varphi(x)=6\ln\left(\frac{1}{3}x\right)$. Найдите $\varphi'(x)$, $\varphi'\left(\frac{1}{3}\right)$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\frac{2}{x},\ y=2,\ x=3.$$

3. Исследуйте на возрастание (убывание) и на экстремумы функцию

$$f(x)=\frac{4x}{e^x}.$$

4*. Необязательное задание. Найдите наименьшее значение функции $f(x)=\frac{1}{\ln 2}(2^x+2^{-x})$ на отрезке $[-1; 1]$.

Контрольная работа № 6 (на 2 урока)

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\sin 2x+\cos 2x=0.$$

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=x^2,\ y=4.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\log_3(y-x)=1,\\ 3^{x+1}\cdot 2^y=24.\end{cases}$$

4. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x+5}}{x^2-9}\geqslant 0.$$

5. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=e^x+\sin x$ в точке его с абсциссой $x_0=0$.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\sin 2x-\cos 2x=0.$$

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=0{,}5x^2,\ y=2.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2(x-y)=1, \\ 2^x \cdot 3^{y+1}=72. \end{cases}$$

4. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x+6}}{4-x^2} \leqslant 0.$$

5. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=e^x+\cos x$ в точке его с абсциссой $x_0=0$.

Вариант 3

1. Решите уравнение

$$1+\sin x \cos x=\cos^2 x.$$

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=-x^2+1,\ y=-x+1.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{3}}(x-y)=2, \\ 2^{x-2} \cdot 5^{y-1}=40. \end{cases}$$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=e^{x+1}-ex$ на отрезке $[-1;\ 1]$.

5. Решите неравенство

$$(3x^2+4)(2 \sin x+1) \geqslant 0.$$

Вариант 4

1. Решите уравнение $1-\sin x \cos x=\sin^2 x$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=-x^2+1,\ y=x+1.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(x+y)=2, \\ 3^{6-x} \cdot 4^{y+3}=36. \end{cases}$$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=e^{x+2}-ex$ на отрезке $[-2;\ 0]$.

5. Решите неравенство

$$(-2x^2-5)(2 \cos x+1) \leqslant 0.$$

ПРИМЕРНЫЕ ВАРИАНТЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ РАБОТ ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА ЗА КУРС СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Вариант 1

1. Решите уравнение $5-5\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\cos^2(\pi-x)$. Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[\pi; 5\pi]$.

2. Решите уравнение

$$\log_2(1-x)+\log_2(-5x-2)=2+\log_2 3.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{7-x^2}{\sqrt{x+3}}\leqslant 0.$$

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=3x^2 \text{ и } y=5-2x^2.$$

5. Найдите область определения функции

$$y=\ln(9-x^2)+\sqrt{\sin x}.$$

6. Найдите наибольшее значение функции

$$y=1+\frac{x^2}{4}\cdot\frac{x-3}{3}$$

на отрезке $[-1; 6]$.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$(\sin x-\cos x)^2=1+\sin x.$$

2. Напишите уравнение касательной к графику функции

$$y=\ln(3-2x)-\sin(0{,}5\pi x)$$

в точке его с абсциссой $x_0=1$.

3. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-5}}{3-x}\geqslant 0.$$

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=x^2+1 \text{ и } y=-x^2+3.$$

5. Постройте график функции

$$y=|2x-4|+2x.$$

6. Найдите наименьшее значение функции

$$y=9-\frac{x^2}{3}\cdot\frac{x+3}{2}$$

на отрезке $[-3; 3]$.

Вариант 3

1. Решите уравнение
$$3\sin 2x-2\cos 2x=2.$$
2. Является ли число $\sqrt{3}$ корнем уравнения
$$4(2+x)^{-1}+(2+x)^2=15?$$
3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases}\log_2(4x-y)=-1,\\ 9^{2x+2}\cdot 3^{2y}=1.\end{cases}$$
4. Решите неравенство
$$(x+2)\cdot\sqrt{9-x^2}\leqslant 0.$$
5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями
$$y=-0{,}5x^2+x+1{,}5,\ \ y=0{,}5x+0{,}5.$$
6. Число 28 представьте в виде суммы трех положительных слагаемых так, чтобы одно слагаемое было в два раза меньше другого, а сумма квадратов всех слагаемых была наименьшей.

Вариант 4

1. Решите уравнение
$$2\cos^2(\pi+x)=1+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right).$$
Назовите два решения, большие 20π.
2. Упростите выражение
$$\left(\frac{a^{0,5}+2}{a^{0,5}-2}-\frac{a^{0,5}-2}{a^{0,5}+2}\right)\cdot\frac{a-4}{16}.$$
Может ли его значение быть равным 1?
3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases}3^y+2x=10,\\ y-2=\log_3(2x).\end{cases}$$
4. Решите неравенство
$$\frac{\lg(2x+0{,}5)}{\log_2(x^2+1)}\leqslant 0.$$
5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями
$$y=\frac{2}{x^2},\ \ y=2x,\ \ x=2.$$
6. Криволинейная трапеция ограничена параболой $y=-\frac{1}{3}x^2+4$ и осью абсцисс. Рассматривается множество прямоугольников, вписанных в эту трапецию, у которых две вершины

лежат на оси абсцисс, а две другие — на параболе. Какой из этих прямоугольников имеет наибольшую площадь?

Вариант 5

1. Решите уравнение

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\cos^2(2\pi+x)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. При каких значениях x значения выражений $x+2$ и $\sqrt{2x^2+6x+1}$ равны?

3. Исследуйте функцию $y=2x^3-1{,}5x^4$ и постройте ее график.

4. Решите неравенство

$$\frac{\lg(0{,}5x+0{,}25)}{\log_{0,3}(x^2+1)}\geqslant 0.$$

5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной прямой $x=0$, графиком функции $y=x^2+6x+10$ и касательной к нему в точке с абсциссой $x_0=-3$.

6. Забором длиной 24 м требуется огородить с трех сторон прямоугольный палисадник наибольшей площади. Найдите размеры палисадника.

Вариант 6

1. При каких значениях x график функции

$$y=\log_7 x+\log_7(x+6)-1$$

пересекает ось абсцисс?

2. Решите неравенство

$$(x-5)\cdot\sqrt{x^2-9}\geqslant 0.$$

3. Является ли число $\sqrt{7}$ корнем уравнения

$$(3-x)\quad 1-\frac{(x+1)^2}{4}=-0{,}5?$$

4. Вычислите интеграл

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} 3\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)dx.$$

5. Исследуйте функцию $y=3x-\frac{x^3}{9}$ и постройте ее график.

6. Для посадки ценных культур нужно выделить участок прямоугольной формы, площадь которого 5,76 га. Какие размеры должен иметь участок, чтобы затраты на постройку ограды вокруг него были наименьшими?

Вариант 7

1. Решите уравнение

$$6-10\cos^2 x+4\cos 2x=\sin 2x.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3^{x+1}\cdot 27^{y-1}=9^{1,5}, \\ 2x-y^2=3. \end{cases}$$

3. Решите неравенство

$$\log_3 x+\log_3(x-1)-1\leqslant\log_3 2.$$

4. Найдите промежутки убывания функции

$$y=\frac{x}{3}-2\sqrt{x}.$$

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=x^2+3 \text{ и } y=2x^2-x+1.$$

6. На параболе $y=1-x^2$ найдите точки, ближайшие к началу координат.

Вариант 8

1. Найдите область определения функции

$$y=(5-2x)^{\frac{1}{3}}+\log_4(2{,}5x+x^2).$$

2. Упростите выражение

$$\frac{4\cos^2 x-\sin 2x}{\cos(\pi-2x)}+\frac{\cos x-3\sin x}{\cos x+\sin(-x)}$$

и найдите его значение при $x=-\frac{\pi}{6}$.

3. Решите уравнение

$$\log_7 x+\log_7(3x-8)=1+2\log_7 2.$$

4. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{5x-1}\leqslant 2, \\ 2^{x-1}-3\cdot 2^{x+2}>-23. \end{cases}$$

5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=x^2-4x+9$, касательной к графику этой функции в точке с абсциссой $x_0=3$ и осью ординат.

6. Перо графопостроителя вычерчивает график функции $y=x-2\cos x$ для всех x, принадлежащих промежутку $[-\pi;\ \pi]$. Найдите координаты точки графика, наиболее удаленной от оси абсцисс.

Вариант 9

1. Найдите область определения функции $y=\frac{\sqrt{4-x^2}}{2x+3}$.

2. При помощи производной исследуйте на монотонность функцию

$$y=\log_{0,3}(6-2x).$$

3. Вычислите $(2+3^{0,5})^{-2}+\frac{\sqrt{12}}{2-\sqrt{3}}$.

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=x^4 \text{ и } y=4-3x^2.$$

5. Найдите критические точки функции

$$f(x)=0,5\cos 2x+\sqrt{2}\sin x,$$

принадлежащие отрезку $[0; \pi]$.

6. С балкона, находящегося на высоте 25 м над поверхностью земли, бросили вертикально вверх мячик с начальной скоростью 20 м/с. Используя зависимость высоты подъема от времени, определите, на какую наибольшую высоту от поверхности земли взлетит мячик. (Считать $g=10$ м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.)

Вариант 10

1. При каких значениях x значения выражений $2\cos x+4\sqrt{3}\sin x+9$ и $4\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$ равны?

2. Вычислите

$$\frac{2}{1+\sqrt{2}}-(2^{0,5}-1)^{-2}.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{2\log_2(3-2x)}{\log_{0,2}0,1}<0.$$

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=x^2 \text{ и } y=0,5x^2+2.$$

5. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{\frac{2x-8}{x^2+x-6}}.$$

6. Заводу поручено изготовить резервуары емкостью 4 м^3, имеющие форму правильной четырехугольной призмы и открытые сверху. При этом внутренняя поверхность должна быть покрыта оловом. Какими следует выбрать размеры резервуара, чтобы израсходовать наименьшее количество олова? (Толщиной стенок пренебречь.)

Вариант 11

1. Решите уравнение $\cos^2 x - \cos 2x = \sin x$. Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-\pi; 2\pi]$.

2. Решите неравенство $\log_{0,4}(3,5-5x) > 2\log_{0,4}0,2-1$.

3. Для функции $f(x)=4\sin 2x + x^{-2}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{3}; 1\right)$.

4. Решите уравнение

$$\sqrt{(x-3)(2x+7)}+3=x.$$

5. При каких значениях a площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=0$, $x=a$, равна 9?

6. Какой наибольший объем может иметь конус, образующая которого равна $2\sqrt{3}$ дм?

Вариант 12

1. Решите неравенство $1+2\log_2 0,3 > \log_2(1,5x-3)$.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2}, \\ \sin x+\sin y=-\sqrt{2} \end{cases}$$

и запишите какие-либо три решения этой системы.

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=-x^2-2x+8 \text{ и } y=5.$$

4. Решите уравнение

$$\sqrt{(x-2)(2x+5)}+2=x.$$

5. В какой точке кривой $y=e^{3x}-1$ касательная параллельна прямой $y=3x-5$?

6. Какой наибольший объем может иметь цилиндр, диагональ осевого сечения которого равна $5\sqrt{3}$ дм?

Вариант 13

1. Решите уравнение

$$2\operatorname{tg} x+3=\operatorname{tg}(1,5\pi+x).$$

Является ли число $0,75\pi$ корнем этого уравнения?

2. Решите уравнение

$$\log_4(\sqrt{59-10x}-1)=0,5+\log_4(x-4).$$

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=5-x^2 \text{ и } y=x+3.$$

4. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $f(x)=\frac{4x-x^2}{4}$ в точке $M(4;\ 0)$. Напишите уравнение этой касательной.

5. Постройте график функции $y=\ln x^{1,5}+\ln\frac{1}{\sqrt{x}}$. (Описание всех свойств не требуется.)

6. Площадь полной поверхности правильной четырехугольной призмы равна 6 дм^2. Найдите наибольший объем этой призмы, зная, что сторона ее основания может принимать любые значения, принадлежащие промежутку $(0,5;\ \sqrt{3})$.

Вариант 14

1. Решите неравенство

$$\ln(2x-3)<\ln(x+1).$$

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=-x^2+2x+3 \text{ и } y=3-x.$$

3. Решите уравнение

$$\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)\cdot(1+\sin x)=1,5\sin(x-9\pi).$$

Является ли число $7\frac{1}{6}\pi$ корнем этого уравнения?

4. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $f(x)=\frac{6x+1,5x^2}{3}$ в точке $M(2;\ 6)$. Напишите уравнение этой касательной.

5. Решите неравенство $4^x-16>6\cdot 2^x$.

6. Объем правильной четырехугольной призмы равен 8 дм^3. Найдите наименьшую полную поверхность этой призмы, зная, что сторона ее основания может принимать любые значения, принадлежащие промежутку $(1;\ 4)$.

Вариант 15

1. Решите неравенство

$$9\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{1+\frac{1}{2}x}>\frac{1}{81^x}.$$

2. Упростите выражение

$$2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)+\frac{2\sin(\pi-\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{tg}\alpha\sin(-\alpha)}.$$

Найдите его значение при $\alpha=-\frac{\pi}{12}$.

3. Фигура, ограниченная линиями $y=-x^3$, $y=0$, $x=-2$, делится прямой $x=a$ на две части. При каком значении a их площади равны?

4. Найдите промежутки возрастания и убывания функции

$$f(x)=\frac{x}{x^2+4}.$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+2y=13, \\ 2\log_4 x-\log_4(2y-1)=0{,}5. \end{cases}$$

6. Найдите наибольший возможный объем правильной четырехугольной пирамиды, боковое ребро которой равно $6\sqrt{3}$ см.

Вариант 16

1. Упростите выражение

$$\frac{2\cos^2\alpha}{1+\sin(\pi+\alpha)}+2\cos(1{,}5\pi-\alpha).$$

Назовите два значения α, при которых данное выражение не имеет смысла.

2. Решите неравенство

$$9^x+3^x>6.$$

3. Решите уравнение $\log_3^2(2-\sqrt{x})=1$.

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=-0{,}5x^2+2 \text{ и } y+x=2.$$

5. Исследуйте на возрастание, убывание и экстремумы функцию

$$y=2x\ln x.$$

6. Основанием пирамиды $MABCD$ служит квадрат, причем $MB\perp ABC$, $MD=4\sqrt{3}$ см. Найдите высоту пирамиды, при которой ее объем наибольший, и вычислите этот объем.

Вариант 17

1. Упростите выражение

$$\cos(-2\alpha)+\frac{2\sin(\pi-2\alpha)}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}.$$

Найдите его значение при $\alpha=\frac{\pi}{8}$.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2-9}\cdot\log_2(0{,}5x)=0.$$

3. Исследуйте на возрастание, убывание и экстремумы функцию

$$f(x)=4xe^{-x}.$$

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=x^2+2x+5 \text{ и } y=5-2x.$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x-y=19, \\ \log_9(2x-1)-2\log_9 y=-0{,}5. \end{cases}$$

6. Найдите наибольший возможный объем правильной треугольной пирамиды, апофема которой равна 6 дм.

Вариант 18

1. Решите уравнение

$$\sqrt{3}\cos^2 x-0{,}5\sin 2x=0.$$

Назовите один положительный и один отрицательный корень этого уравнения.

2. Решите уравнение $\sqrt{13-x^2}+1=x^2$.

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=-0{,}5x^2+2x \text{ и } y=0{,}5x.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3^{1+\log_3(x+2y)}=6x, \\ 3^{x^2-2y}=9^{0{,}5x}. \end{cases}$$

5. Решите неравенство $\log_2(x-1)+\log_2(x-3)<3$.

6. При проектировании цеха по переработке плодоовощной продукции планируется строительство нескольких одинаковых холодильных камер, каждая из которых имеет форму правильной четырехугольной призмы объемом 144 м^3. Для облицовки боковых стенок камеры используют материал, цена которого 15 р., а для облицовки дна —20 р. за один квадратный метр. При каких размерах холодильной камеры стоимость ее облицовки будет наименьшей?

Вариант 19

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\sin x,\ y=0,\ x=\frac{2\pi}{3},\ 0\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}.$$

2. Упростите выражение

$$\frac{2\cos\alpha-\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha-\sin\alpha+\cos^2\alpha}.$$

Укажите множество значений α, при которых значение данного выражения равно -1.

3. Решите уравнение

$$4\ln^2 x-\ln x^2=2.$$

4. Исследуйте функцию

$$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2$$

и постройте ее график.

5. К кривым $y=0{,}5x^2$ и $y=-0{,}5x^2-1$ проведена общая касательная под острым углом к оси абсцисс. Напишите уравнение этой касательной.

6. Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы равна $4\sqrt{3}$ дм. При какой высоте призмы объем ее будет наибольший? Вычислите этот объем.

Вариант 20

1. Найдите область определения функции

$$f(x)=\ln\left(\frac{1}{3}x^2-2x\right)+\sqrt{8-x}.$$

2. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$(y^2-4)(2x^2-3|x|-5)=0.$$

3. Решите неравенство

$$2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1\geqslant 0.$$

4. Найдите первообразную для функции

$$f(x)=2x+\frac{3}{x}.$$

5. Решите уравнение

$$\log_4(3x-4)-\log_4(5-x^2)=0{,}5.$$

6. Сумма всех ребер правильной шестиугольной призмы равна 36 см. Найдите сторону основания призмы, при которой объем призмы наибольший.

МАТЕРИАЛ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОГРАММИРОВАННОГО КОНТРОЛЯ

Работа 1. Основное свойство первообразной

Задание		Ответ			
Вариант 1	Вариант 2	1	2	3	4
Для функции $f(x)$ найдите первообразную $F(x)$, если:					
$f(x)=\frac{2}{x^3}$, $F(1)=1$	$f(x)=\frac{2}{x^2}$, $F(1)=1$	$-x^{-2}-2$	$-x^{-2}+2$	$-2x^{-1}+3$	$2x^{-1}-1$
Найдите общий вид первообразных для функций:					
$f(x)=2\sin 3x$,	$f(x)=3\cos 2x$,	$-\frac{2}{3}\cos 3x+C$	$\frac{2}{3}\cos 3x+C$	$-\frac{3}{2}\sin 2x+C$	$\frac{3}{2}\sin 2x+C$
$f(x)=1+\frac{1}{\cos^2 4x}$	$f(x)=1+\frac{1}{\sin^2 4x}$	$x-\frac{1}{4}\operatorname{ctg} 4x+C$	$x+\frac{1}{4}\operatorname{tg} 4x+C$	$x-\frac{1}{4}\operatorname{tg} 4x+C$	$x+\frac{1}{4}\operatorname{ctg} 4x+C$

Верный ответ: вариант 1—212; вариант 2—341.

Работа 2. Вычисление интегралов и площадей криволинейных трапеций

Задание		Ответ			
Вариант 1	Вариант 2	1	2	3	4
Вычислите:					
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx$; $\int_1^2 \frac{dx}{x^4}$	$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$; $\int_1^2 \frac{dx}{x^5}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{15}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{15}{64}$	$\frac{1}{2}$; $\frac{15}{16}$	$\sqrt{2}$; $\frac{7}{24}$
Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:					
$y=x^2$, $y=0$, $x=2$	$y=x^3$, $y=0$, $x=2$	4	8	$2\frac{2}{3}$	2

Верный ответ: вариант 1—243; вариант 2—321.

Работа 3. Обобщение понятия степени

Задание		Ответ			
Вариант 1	Вариант 2	1	2	3	4
Найдите значение выражения:					
$\sqrt[4]{6-2\sqrt{5}}\cdot\sqrt[4]{6+2\sqrt{5}}$	$\sqrt[6]{7-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}$	1	-2	-1	2
Решите уравнение:					
$\sqrt{2+x}=x$	$\sqrt{2-x}=x$	2	1	-1	-2
Упростите выражение:					
$\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$	$\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}$	$9-2\sqrt{5}$	$9+2\sqrt{5}$	$9-4\sqrt{5}$	$9+4\sqrt{5}$

Верный ответ: вариант 1—413; вариант 2—124.

Работа 4. Показательные уравнения и неравенства

Задание		Ответ			
Вариант 1	Вариант 2	1	2	3	4
Решите уравнение:					
$9^{-1}\cdot 3^x=81$	$4^{-1}\cdot 2^x=8$	6	2	5	1
Решите неравенство:					
$\left(\frac{1}{5}\right)^x<25$	$\left(\frac{1}{3}\right)^x>9$	$(-\infty;-2)$	$(-2;0)$	$(-2;\infty)$	$(0;2)$
Решите уравнение:					
$2^x+2^{x+2}=20$	$3^{x+2}-3^x=24$	-1	2	-2	1

Верный ответ: вариант 1—132; вариант 2—314.

Работа 5. Логарифмические уравнения и неравенства

Задание. Вариант 1	Задание. Вариант 2	Ответ 1	Ответ 2	Ответ 3	Ответ 4
Решите уравнение:					
$\log_{0,5}(\sqrt{x}-1)=-1$, $\lg^2 x-\lg x=0$	$\log_{0,2}(6-\sqrt{x})=-1$, $\lg^2 x+\lg x=0$	1 1; 100	5 1; 0,1	8 1; 10	9 1; 0,01
Решите неравенство:					
$\log_5(-x)<0$	$\log_{0,4}(-x)<0$	$(-\infty; 0)$	$(-1; 0)$	$(0; \infty)$	$(-\infty; -1)$

Верный ответ: вариант 1—432; вариант 2—124.

Работа 6. Производная показательной и логарифмической функций

Задание. Вариант 1	Задание. Вариант 2	Ответ 1	Ответ 2	Ответ 3	Ответ 4
Найдите $f'(0)$, если:					
$f(x)=x\cdot 2^x$	$f(x)=x\cdot 2^{x+1}$	-2	-1	1	2
Вычислите (с точностью до 0,1) площадь фигуры, ограниченной линиями:					
$y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=1$	$y=\frac{1}{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=3$	1,1	2,8	1,2	1,7
Найдите промежутки возрастания функции:					
$\varphi(x)=\frac{2x}{e^x}$	$\varphi(x)=\frac{x-1}{e^x}$	$[1; \infty)$	$(-\infty; 1]$	$(-\infty; 2]$	$[2; \infty)$

Верный ответ: вариант 1—342; вариант 2—413.

КАРТОЧКИ-ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ЗАЧЕТОВ ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

Зачет № 1 по теме «Первообразная и интеграл»

Карточка 1

1. Сформулируйте определение первообразной. Приведите примеры.

2. Для функции $f(x)=\sin x+2\cos x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $A\left(\frac{\pi}{2};\ 0\right)$.

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=\sqrt{x}$, $y=1$, $x=4$;

б)* $y=-x^2+2$, $y=-x$.

Карточка 2

1. Докажите основное свойство первообразной.

2. Найдите общий вид первообразных для функции

$$f(x)=4\sin 2x-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}+1.$$

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=x^3$, $y=8$, $x=1$;

б)* $y=3\sin x$, $y=-\sin x$, $0\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$.

Карточка 3

1. Докажите три правила нахождения первообразных.

2. Вычислите:

а) $\int\limits_1^9\frac{6x}{\sqrt{x}}\,dx$; б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin x+\cos x)^2\,dx$.

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$;

б)* $y=-|x|+2$, $y=x^2$.

Карточка 4

1. Пусть криволинейная трапеция ограничена графиком непрерывной функции $f(x)>0$, прямыми $x=a$, $x=b$ и отрезком $[a;\ b]$ оси абсцисс; S — площадь трапеции. Разъясните смысл равенства $S'(x)=f(x)$.

2. Вычислите:

а) $\int\limits_1^4(x-2)^2\,dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{4}{\cos^2 2x}\,dx$.

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=x^2+1$, $y=x+3$;

б)* $y=2\cos^2\frac{x}{2}+1$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi$.

Карточка 5

1. Пусть криволинейная трапеция ограничена графиком непрерывной функции $f(x)>0$, прямыми $x=a$, $x=b$ и отрезком $[a; b]$ оси абсцисс; S — площадь трапеции. Разъясните смысл равенств $S(x)=F(x)-F(a)$ и $S=F(b)-F(a)$.

2. Докажите, что $F(x)=x\sqrt[3]{x}-\sin 2x+3$ есть первообразная для функции $f(x)=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}-2\cos 2x$ на промежутке $(0; \infty)$.

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=\cos x$, $y=0$, $-0{,}5\pi\leqslant x\leqslant 0{,}5\pi$;

б)* $y=-x^2+3$, $y=2x$.

Карточка 6

1. Запишите формулу Ньютона — Лейбница. Разъясните ее смысл.

2. Для функции $f(x)=6\sin 4x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $B\left(-\frac{\pi}{3}; 0\right)$.

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=-x^2+2x+3$, $y=0$;

б)* $y=2\sin^2\frac{x}{2}+2$, $y=0$, $x=0$, $x=\frac{3\pi}{2}$.

Зачет № 2 по теме «Обобщение понятия степени»

Карточка 1

1. Сформулируйте определение корня n-й степени из числа, определение арифметического корня. Приведите примеры.

2. Вычислите

$$(3-2\sqrt{2})^{-1}+(2^{0,5}-1)^2.$$

3. Решите уравнение:

а) $8x^3-125=0$;

б) $\sqrt{(3x-1)(4x+3)}+1=3x$;

в)* $\sqrt{4\cos x+1}=2\sin x$.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt[3]{y}-\sqrt{x}=7,\\ \sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{y}=18.\end{cases}$$

Карточка 2

1. Сформулируйте и докажите основные свойства арифметического корня n-й степени.

2. Вычислите

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-2^{0,2}\cdot\frac{1-2^{0,5}}{2^{-0,3}}.$$

3. Решите уравнение:

а) $x^2=64$; б) $\frac{4-x}{2+\sqrt{x}}=8-x$;

в)* $\sqrt{3\sin x+1,5}=2\cos x$.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}=1,\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4.\end{cases}$$

Карточка 3

1. Разъясните понятие иррационального уравнения. Приведите примеры иррациональных уравнений, имеющих решение; примеры уравнений, не имеющих решения.

2. Вычислите:

$$\left((3\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{0,5^{-1}}\right)\left((3\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}}+0,5\right).$$

3. Решите уравнение:

а) $16x^4-81=0$;

б) $\sqrt{3x^2-11x+10}=8-2x$;

в)* $\sqrt{\sin^2 x+\sin x\cos x}=\sqrt{2}\sin x$.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x-y=16,\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=2.\end{cases}$$

Карточка 4

1. Расскажите о способах решения иррациональных уравнений; о решении уравнений с использованием равносильных переходов.

2. Выполните действия

$$\left(\frac{2+x^{\frac{1}{4}}}{2-x^{\frac{1}{4}}}-\frac{2-x^{\frac{1}{4}}}{2+x^{\frac{1}{4}}}\right)\cdot\frac{4-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}}.$$

3. Решите уравнение (неравенство):

а) $x^4<5$; б) $\sqrt[4]{x+1}+20=\sqrt{x+1}$;

в)* $\sqrt{3|x|+3}=\sqrt{x^2-25}$.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=20, \\ xy=8. \end{cases}$$

Карточка 5

1. Сформулируйте определение степени с рациональным показателем. Запишите основные свойства степеней с рациональными показателями. Докажите одно из этих свойств.

2. Вычислите

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(0{,}81)^{-0{,}5}.$$

3. Решите уравнение (неравенство):

а) $x^6>16$; б) $(x+2)\sqrt{x^2-x-20}=6x+12$;

в)* $\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}=2$.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+xy=10, \\ y^2+xy=15. \end{cases}$$

Зачет № 3 по теме «Логарифмическая функция, логарифмические уравнения и неравенства, системы уравнений»

Карточка 1

1. Сформулируйте определение логарифмической функции, определение логарифма числа. Запишите основное логарифмическое тождество.

2. Найдите область определения функции

$$f(x)=\log_3(-0{,}5x^2+4{,}5).$$

3. Упростите выражение

$$\frac{3\log_7 4+\log_7 0{,}5}{1-\log_7 14}.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{y-1}=4^{0{,}5x}, \\ \log_3(7x+y)=2. \end{cases}$$

5*. Решите неравенство $\dfrac{\log_2\cos x+1}{-x^2-4}>0$.

Карточка 2

1. Расскажите план построения графика логарифмической функции. Приведите пример.

2. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{4-x^2}\cdot\lg(x-1)^2.$$

3. Что больше:

$$3^{\log_2 5}+\sqrt{10} \text{ или } 5^{\log_2 3}+\lg 11?$$

4. Решите уравнение

$$\log_3(x^2-3)+\log_3 2=\log_3(6x-10).$$

5*. Постройте график функции

$$y=|\log_2(x-1)|.$$

Карточка 3

1. Расскажите свойства логарифмической функции, иллюстрируйте их на примерах.
2. Постройте график функции

$$y=2{,}3^{\log_{2,3}(4-x^2)}.$$

3. Найдите x, если $\log_5 x=4\log_5 3-\frac{1}{3}\log_5 27$.
4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\sin x-3\log_{0,5} y=5, \\ 3\sin x+\log_{0,5} y=-3{,}5. \end{cases}$$

5*. Решите неравенство

$$\lg^2 x-\lg x^2>3.$$

Карточка 4

1. Докажите теорему о логарифме произведения.
2. Решите неравенство

$$\log_2(4-3x)<4.$$

3. Решите уравнение

$$x^{0,5\lg x}=0{,}01x^2.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{1+\log_2(x+y)}=8, \\ \log_2(3x-1)-\log_2 y=3. \end{cases}$$

5* Решите неравенство

$$\log_{0,2} x+\log_{0,2}(x-3)+1\geqslant\log_{0,2} 0{,}8.$$

Карточка 5

1. Докажите теоремы о логарифме частного и степени.
2. Постройте график функции

$$y=\log_{0,5} 2x.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2-36}\cdot(\lg 2x-1)=0.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3^y+x=10, \\ y-\log_3 x=2. \end{cases}$$

5* Вычислите $\log_{a\sqrt{b}} a^2b$, зная, что $\lg a=3$, $\lg b=2$.

Карточка 6

1. Запишите формулу перехода от одного основания логарифма к другому; разъясните ее роль в организации вычислений с помощью таблиц и калькулятора.

2. Решите неравенство

$$2^{\log_2(0,3x+1,5)}<8.$$

3. Решите уравнение

$$\lg(2x+6)+\lg 5x=2.$$

4. Решите неравенство

$$(x-5)\log_3 x\geqslant 0.$$

5*. Что больше: $\log_2 9\cdot\log_9 28$ или $\log_2 16\sqrt{8}$?

Зачет № 4 по теме «Производная и первообразная показательной, логарифмической и степенной функций»

Карточка 1

1. Расскажите о числе e. Докажите правило дифференцирования функции $y=e^x$.

2. Дана функция $f(x)=\frac{4^x}{x^2}$. Найдите $f'(-1)$.

3. Вычислите $\int\limits_3^1\frac{dx}{5-3x}$.

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=x^{-0,4},\ x=1,\ x=32,\ y=0.$$

5. а) Найдите промежутки возрастания, убывания и экстремумы функции $f(x)=2x^2e^{x-1}$.

б)* Изобразите схематически график данной функции.

Карточка 2

1. Докажите правило дифференцирования функции $y=a^x$. Назовите первообразные функций $y=e^x$, $y=a^x$.

2. Вычислите производные функций $f(x)=\log_3 x$ и $\varphi(x)=3\ln 2x$ в точке $x=0,5$.

3. Найдите одну из первообразных для функции

$$f(x)=\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x+1}.$$

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=2^x,\ y=1,\ x=2.$$

5. а) Найдите промежутки возрастания, убывания и экстремумы функции $f(x)=2x-2\ln x$.

б)* Изобразите схематически график данной функции.

Карточка 3

1. Докажите правило дифференцирования логарифмической функции.

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=0{,}5e^{x-1}$ в точке $x_0=2$.

3. Решите неравенство

$$\ln^2 x+\ln x>0.$$

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\frac{1}{x},\ x=2,\ y=2.$$

5. а) Найдите промежутки возрастания, убывания и экстремумы функции $f(x)=2(1+x)e^{-x}$.

б)* Изобразите схематически график данной функции.

Карточка 4

1. Назовите первообразную для функции $f(x)=\frac{1}{x}$.

2. Дана функция $f(x)=4^{x-1}\cos\frac{\pi}{2}x$. Найдите $f'(1)$.

3. Решите уравнение

$$0{,}5\ln(3x-2)=\ln(4-x).$$

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=1+e^x,\ y=0,\ x=-1,\ x=0.$$

5. а) Найдите промежутки возрастания, убывания и экстремумы функции $f(x)=4(1-x)e^x$.

б)* Изобразите схематически график данной функции.

Карточка 5

1. Докажите правило дифференцирования степенной функции, назовите ее первообразную.

2. Решите неравенство

$$e^{\ln(4x-3)}<1.$$

3. Решите уравнение

$$0{,}5\ln x^2+2\ln\sqrt{x}=4.$$

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=e^{-x},\ y=0,\ x=-1,\ x=2.$$

5. а) Найдите промежутки возрастания, убывания и экстремумы функции $f(x)=0{,}5x^2-\ln x$.

б)* Изобразите схематически график данной функции.

Карточка 6

1. Расскажите о дифференциальном уравнении радиоактивного распада.

2. Решите уравнение

$$e^x+6e^{-x}=5.$$

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=\frac{3^x+3^{2-x}}{\ln 3}$$

на отрезке [0; 2].

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\frac{6}{x},\ y=1,\ x=1.$$

5. а) Найдите промежутки возрастания, убывания и экстремумы функции $f(x)=\frac{6\ln x}{x}$.

б)* Изобразите схематически график данной функции.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Самостоятельные работы

Вариант 1

С—1. 2. Общий вид первообразных: а) $\frac{x^6}{6}+C$; б) $-3{,}5x+C$. **С—2. 1.** $\frac{x^3}{3}+2\frac{1}{3}$. **С—3.** а) $-2\cos x+3\sin x+C$; б) $6\sqrt{x}+\frac{x^3}{3}+C$. **С—4. 1.** $S'(x)=2x$. **2.** 1,5. **С—5.** а) 12; б) 1. **С—6.** а) $8\frac{2}{3}$; б) 4. **С—7.** 60,9 м. **С—8.** а) $\frac{1}{3}$; б) $2-\sqrt{2}$. **С—9. 1.** а) 10,5; б) $3\sqrt{3}-3$. **2.** 7π. **С—10. 1.** Нет. **2.** а) 11; б) 15. **3.** а) 9,1488; б) 2,7589. **4.** Второе больше. **С—11. 1.** $-\sqrt{2a^2}$. **2.** а) $-\sqrt[3]{18}$; б) 1. **3.** а) 3; б) $2a$. **С—12. 1.** 17. **2.** (8; 1). **С—13. 1.** а) 32; б) 27; в) 2. **2.** Первое больше. **3.** $u^{\frac{1}{3}}+2$. **С—14. 2.** а) 8; б) 6. **3.** $(-2;\ \infty)$. **С—15. 1.** а) 4; б) 1,5. **2.** а) $(1{,}75;\ \infty)$; б) $(-2;\ \infty)$. **С—16. 1.** а) 0; б) 2. **2.** $(-\infty;\ -1)\cup(0;\ \infty)$. **С—17. 1.** $\lg 7+3\lg a+\frac{2}{3}\lg|b|$. **2.** а) 0,5; б) 2. **3.** 3,6419. **С—18. 1.** Второе больше. **2.** $\left(-\frac{4}{3};\ \infty\right)$. **С—19. 1.** а) 1; 2; б) $\varnothing$. **2.** а) $(1;\ \infty)$; б) $(4{,}5;\ \infty)$. **С—20. 1.** а) 3; $\frac{1}{9}$; б) 10; 10 000 000. **2.** а) $(0{,}0001;\ 10)$; б) $(\log_4 7+1;\ \infty)$. **С—21.** а) (2; 6); (6; 2); б) $(-2;\ 1)$; $(-\log_2 3;\ \log_3 4)$. **С—22. 1.** а) $g(x)=\frac{4-x}{3}$, $D(g)=E(g)=R$; б) $g(x)=\sqrt{1-x^2}$, $D(g)=E(g)=[0;\ 1]$. **2.** $g(-1)=-1$; $g(2)=\frac{2}{3}$; $g(3)=1$; $D(g)=[-2;\ 4]$; $E(g)=\left[-2;\ \frac{4}{3}\right]$ (рис. 25). **С—23. 1.** а) $-5e^{-5x}$; б) $2^x(1+x\ln 2)$. **2.** $y=\frac{2}{e}-\frac{x}{e}$. **3.** Убывает на $(-\infty;\ -0{,}5]$, возрастает на $[-0{,}5;\ \infty)$. **4.** e^3-e. **С—24. 1.** а) $\frac{2}{2x+1}$; б) $\frac{4x-3}{(2x^2-3x+1)\ln 3}$. **2.** $\ln 3$. **3.** $x_{\min}=\frac{1}{\sqrt{e}}$. **С—25. 1.** $\sqrt{3}\,(x^{\sqrt{3}-1}+x^{-\sqrt{3}-1})$. **2.** 5,002. **3.** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. **С—26. 2.** $f(x)=3e^{3x}$. **3.** $x''=-4x$.

Вариант 2

С—1. 2. Общий вид первообразных: а) $-\frac{x^5}{5}+C$; б) $6{,}4x+C$. **С—2. 1.** $\frac{x^4}{4}-1\frac{1}{4}$. **С—3.** а) $-3\cos x-2\sin x+C$; б) $8\sqrt{x}-$

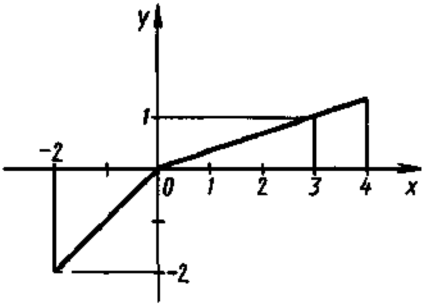

Рис. 25

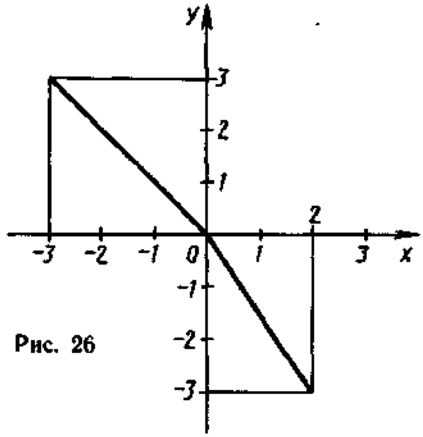

Рис. 26

$-\frac{1}{2}x^2+C$. **С—4.** 1. $S'(x)=3x$. 2. 1,5. **С—5.** а) 4; б) 1. **С—6.** а) 20; б) 4. **С—7.** 22,8 м. **С—8.** а) $\frac{2}{3}$; б) $\sqrt{2}-1$. **С—9.** 1. а) 6,2; б) 1. 2. $\frac{62}{3}$ л. **С—10.** 1. Да. 2. а) 7; б) 15. 3. а) 5,4222; б) 3,2075. 4. Первое больше. **С—11.** 1. $-\sqrt{5b^2}$. 2. а) $-\sqrt[3]{24}$; б) $4^6=4096$. 3. а) 4; б) $-2a$. **С—12.** 1. 8. 2. (64; 1). **С—13.** 1. а) $\frac{1}{9}$; б) 64; в) 4. 2. Первое. 3. $2v^{\frac{1}{3}}+1$. **С—14.** 2. а) 81; б) 8. 3. $(-\infty;\ 1)$. **С—15.** 1. а) 1,5; б) $-\frac{1}{3}$. 2. а) $(-\infty;\ 4{,}5)$; б) $(-\infty;\ -2]$. **С—16.** 1. а) 1; б) 4. 2. $[-2;\ \infty)$. **С—17.** 1. $4+6\log_2|a|+0{,}6\log_2 b$. 2. а) 0,5; б) 2. 3. 3,0600. **С—18.** 1. Первое больше. 2. $(0{,}5;\ \infty)$. **С—19.** 1. а) -1; 5; б) $\varnothing$. 2. а) $\varnothing$; б) $(-2{,}5;\ 1{,}5)$. **С—20.** 1. а) $\frac{1}{8}$; 4; б) 100; $\sqrt[3]{10\,000\,000}$. 2. а) $(0;\ \infty)$; б) $[0;\ \log_3 2]$. **С—21.** а) (2; 4); (4; 2); б) $(1;\ -1)$; $(\log_2 3;\ -\log_3 2)$. **С—22.** 1. а) $g(x)=\frac{3-x}{4}$, $D(g)=E(g)=R$; б) $g(x)=\sqrt{x^2+4}$, $D(g)=[0;\ \infty)$, $E(g)=[2;\ \infty)$. 2. $g(-2)=2$; $g(1)=-1{,}5$; $D(g)=[-3;\ 2]$; $E(g)=[-3;\ 3]$ (рис. 26). **С—23.** 1. а) $-0{,}3e^{-0{,}3x}$; б) $3^x(1+x\ln 3)$. 2. $y=\frac{2}{e}+\frac{x}{e}$. 3. Возрастает на $\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right]$, убывает на $\left[\frac{1}{3};\ \infty\right)$. 4. $e^{-2}-e^{-4}$. **С—24.** 1. а) $\frac{3}{3x-4}$; б) $\frac{2-6x}{(3x^2-2x+5)\ln 2}$. 2. $\ln 2$. 3. $x_{\min}=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$. **С—25.** 1. $\sqrt{2}\,(x^{\sqrt{2}-1}-x^{-\sqrt{2}-1})$. 2. 2,0025. 3. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. **С—26.** 2. $f(x)=5e^{4x}$. 3. $x''=-0{,}25x$.

Вариант 3

С—1. 2. а) Является; б) не является. С—2. 2. $F(x) = -\cos x - 1$. С—3. 1. $F(x) = (x-1)^2$. 2. $\sqrt{2x+1} + 4\cos\frac{x}{4} + C$. С—4. 1. $S(x) = 1{,}5x^2 + x - 2{,}5$. 2. 4. С—5. а) 10; б) 3; в) $6\sqrt{3}$. С—6. а) $2\frac{2}{3}$; б) 4. С—7. а) $S = 1{,}5$; б) 1,45; 0,05; в) $S_n = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{n}\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1{,}5$. С—8. а) 7,5; б) 4,5. С—9. 1. а) 24,2; б) $8\sqrt{3}$. 2. $0{,}5\pi$. С—10. 1. а) -2; б) 0. 2. а) -1; 1; б) $-0{,}2$. С—11. 1. 2. 2. $2-\sqrt{3}$. 3. $(-\infty; -2)\cup(2; \infty)$. С—12. 1. -7; 2. 2. (4; 9), (9; 4). С—13. 1. Первое. 2. 43. 3. $\sqrt{y} - \sqrt{x}$. С—14. а) $(-1; \infty)$; $(-1; 2)$; б) $\max\limits_{[-2;\,4]} y = y(4) = 15$, $\min\limits_{[-2;\,4]} y = y(0)$. С—15. 1. а) $-1{,}5$; б) 2. 2. $(-\infty; 0)$; б) $(-\infty; -3)\cup(3; \infty)$. С—16. 1. $(-\infty; -1{,}5)\cup(-0{,}5; \infty)$. 2. а) 2; б) 2. С—17. 1. 2. 2. 21. 3. $\lg x = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\lg a$. С—18. а) (0,5; 8); б) $\min\limits_{[0,5;\,8]} y = y(2) = 0$, $\max\limits_{[0,5;\,8]} y = y(0{,}5) = y(8) = 2$. С—19. 1. а) 16; б) 100; 0,01. 2. а) (0; 1); б) $(-1; 1)$. С—20. 1. 3. 2. а) $(0; 0{,}1]\cup[10; \infty)$; б) [2; 9]. С—21. а) (27; 9); б) (0; 3). С—22. а) Обратная функция $y = -3x + 6$; б) обратная функция $y = \sqrt{x+1}$. С—23. 1. $-e^{-2x}(2\cos 3x + 3\sin 3x)$; -2. 2. $\frac{80}{3\ln 3} \approx 24{,}3$. 3. $e^2 - 3 \approx 4{,}4$. С—24. 1. $\frac{10}{x}$; 6. 2. Возрастает на (0; 1], убывает на $[1; \infty)$. 3. $4\ln 4 - 3 \approx 2{,}55$. С—25. 1. 11,25. 2. $y = 2x + 3$. С—26. 2. $y = Ce^{-2x}$, $y = e^{1-2x}$.

Вариант 4

С—1. 2. а) Является; б) не является. С—2. 2. $F(x) = \sin x + 1$. С—3. 1. $F(x) = (x+2)^2$. 2. $\frac{2}{3}\sqrt{3x-1} + 2\sin\frac{x}{2} + C$. С—4. 1. $S(x) = 0{,}25x^2 + x$. 2. 4. С—5. а) 16; б) 42; в) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. С—6. а) $5\frac{1}{3}$; б) 4. С—7. а) $S = 0{,}75$; б) 0,725; 0,025; в) $S_n = \frac{1}{4}\left(3 - \frac{1}{n}\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0{,}75$. С—8. а) 4,5; б) $10\frac{2}{3}$. С—9. 1. а) 12,2; б) 8. 2. $\frac{13}{15}\pi$. С—10. 1. а) $2\sqrt{10} - 3$; б) $2a$. 2. а) -1; 1; б) $\frac{1}{3}$. С—11. 1. 4. 2. $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. 3. $(-1; 1)$. С—12. 1. 2; -12. 2. (1; 9), (9; 1). С—13. 1. Числа равны. 2. 18. 3. $\sqrt{a} - \sqrt{b}$. С—14. а) $(-1; \infty)$; $(-1; 1)$; б) $\max\limits_{[-2;\,2]} y = y(2) = 8$, $\min\limits_{[-2;\,2]} y = y(0) = 0$. С—15. 1. а) $-1\frac{1}{3}$; б) 0,25. 2. а) $(-\infty; -1)$; б) $(-3; 3)$. С—16. 1. $(-0{,}5; 2{,}5)$.

2. а) 3; б) 3. **С—17.** 1. 3. 2. 30. 3. $\lg x=-1{,}5-\frac{2}{3}\lg a$. **С—18.** а) (1,5; 5); б) $\max\limits_{[1{,}5;\ 9]} y=y(9)=3$, $\min\limits_{[1{,}5;\ 9]} y=y(2)=0$. **С—19.** 1. а) 8; б) 1000; 0,001. 2. а) (0; 2); б) (−1; 1). **С—20.** 1. 1; 2. 2. а) [0,2; 5]; б) [1; 4]. **С—21.** а) (64; 16); б) (3; 1). **С—22.** а) Обратная функция $y=-2x+4$; б) обратная функция $y=\sqrt{x+2}$. **С—23.** 1. $e^{-x}(-\sin 2x+2\cos 2x)$. 2. $\frac{24{,}8}{\ln 5}\approx 15{,}4$. 3. $e^2-3\approx 4{,}4$. **С—24.** 1. $\frac{1}{8x}$, $-\frac{1}{6}$. 2. Убывает на (0; 1], возрастает на [1; ∞). 3. $2\ln 4-1{,}5\approx 1{,}27$. **С—25.** 1. 22,5. 2. $y=-3x+4$. **С—26.** 2. $y=Ce^{-4x}$, $y=e^{5-4x}$.

Вариант 5

С—1. 2. а) Да; б) нет. **С—2.** 1. $1+x-\frac{x^2}{2}$. 2. а) $\frac{2}{21}(7x+1)\sqrt{7x+1}+C$; б) $-\frac{1}{3}\cos 3x-\operatorname{tg} x+C$. **С—3.** а) $-\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{3}+C$; б) $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{2}{\sqrt{x}}+C$. **С—4.** а) $1\frac{1}{3}$; б) 1. **С—5.** а) $4\frac{2}{3}$; б) 0; в) 28. **С—6.** а) $1\frac{1}{6}$; б) $3\sqrt{3}$. **С—7.** 32. **С—8.** 1. π. 2. $0{,}4+\frac{4}{\pi}$. **С—9.** 1. а) 8π; б) $25{,}6\pi$. 2. $\frac{1}{6}$ Дж. **С—10.** 1. Нет. 2. а) 2; б) $2\frac{1}{3}$. 3. а) 2,2057; б) 2,6741. 4. Первое больше. **С—11.** 1. $-a\sqrt[4]{2}$. 2. а) $\sqrt[3]{5}$; $-\sqrt[3]{2}$; б) 1. 3. а) 3; б) $2a$ при $a\geqslant 0$; 0 при $a<0$. **С—12.** 1. −3; 4. 2. (64; 1). **С—13.** 1. а) 0,5; б) $\frac{1}{3}$. 2. Числа равны. 3. 4. **С—14.** 2. а) 25; б) $\frac{1}{27}$. 3. $D(y)=[2;\ \infty)$, $E(y)=[0;\ \infty)$. **С—15.** 1. а) 4; б) −1. 2. а) (−∞; 0); б) (−1; 1). **С—16.** 1. а) $\pm\sqrt{\frac{7}{3}}$; б) −2; −1. 2. (−2; ∞). **С—17.** 1. а) 4; б) 9. 2. $1{,}5-2\log_2 3+\log_2 a+\frac{1}{12}\log_2 b+\frac{1}{4}\log_2 c-\frac{1}{2}\log_2 x-2\log_2|y|$. 3. а) Равны; б) первое больше. **С—18.** 1. а) Минус; б) плюс. 2. $(-\infty;\ -\sqrt{10})\cup(-\sqrt{10};\ -3)\cup(3;\ \sqrt{10})\cup(\sqrt{10};\ \infty)$. **С—19.** 1. а) −1; 6; б) 3,5. 2. а) $\left(\frac{4}{3};\ 3\right)$; б) (1; ∞). **С—20.** 1. а) $\frac{1}{3}$; $27\sqrt{3}$; б) 10; $100\sqrt[4]{1000}$. 2. а) $(0;\ 0{,}1)\cup(\sqrt[4]{10};\ \infty)$; б) $(\log_7 5;\ \infty)$. **С—21.** а) (3; 5); (5; 3); б) $(2\pi k;\ \pi n)$; $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k; (-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $k\in \mathbf{Z}$, $n\in \mathbf{Z}$. **С—22.** 1. а) $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$, $D(g)=(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ \infty)$, $E(g)=(-\infty;\ 1)\cup(1;\ \infty)$; б) $g(x)=-\sqrt{3-x^2}$, $D(g)=[0;\ \sqrt{3}]$,

$E(g)=[-\sqrt{3};\ 0]$. 2. $g(-2)=3$; $g(0)=0$; $g(1)=-2$; $D(g)=(-3;\ -1{,}5]\cup[-1;\ 2]$; $E(g)=[-4;\ 4]$ (рис. 27). **С—23.** **1.** а) $0{,}02e^{7-0{,}1x}$; б) $-2\ln 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-0{,}5}$. **2.** $y=-x+2$. **3.** Убывает на $(-\infty;\ 0]$, возрастает на $[0;\ \infty)$. **4.** $\frac{7}{6}$. **С—24.** **1.** а) $\frac{1}{x-5}$; б) $\frac{2x\sqrt{x}-1}{\ln 3\,(x^2\sqrt{x}-2x)}$. **2.** $y=\frac{x}{4\ln 2}+2-\frac{1}{4\ln 2}$. **3.** Убывает на $(0;\ e^{-0{,}5}]$, возрастает на $[e^{-0{,}5};\ \infty)$. **С—25.** **1.** $\sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1}-2x^{-3}$. **2.** 0,004. **3.** $\frac{\pi^{\pi+1}-1}{\pi+1}\approx 27{,}4167$. **С—26.** **1.** $y'=-3y$. **2.** $f(x)=2^{2x-1}$. **3.** $A\cos\left(\frac{1}{3}t+\varphi\right)$.

Вариант 6

С—1. **2.** а) Да; б) нет. **С—2.** **1.** $x-2x^2+12$. **2.** а) $\frac{1}{9}(6x-2)\times\sqrt{6x-2}+C$; б) $\frac{1}{3}\sin 3x-\operatorname{ctg} x+C$. **С—3.** а) $-\cos\frac{x}{3}+\sin\frac{x}{2}+C$; б) $-\frac{2}{x}-\frac{3}{2x^2}-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$. **С—4.** а) $\frac{1}{4}$; б) 1. **С—5.** а) 2; б) 1; в) $-\frac{56}{3}$. **С—6.** а) $\frac{4\sqrt{2}}{3}-1\frac{1}{6}$; б) $8-3\sqrt{3}$. **С—7.** $\frac{2}{3}t\sqrt{t}+\frac{\sin \pi t}{\pi}+3$. **С—8.** **1.** $\sqrt{3}-1$. **2.** -13. **С—9.** **1.** а) $6{,}4\pi$; б) 8π. **2.** 0,02 Дж. **С—10.** **1.** Да. **2.** а) 1; б) 6,2. **3.** а) 2,7320; б) 2,7583. **4.** Второе больше. **С—11.** **1.** $-b\sqrt[3]{2}$. **2.** а) $\sqrt[3]{5}$; $-\sqrt[3]{3}$; б) 625. **3.** а) 4; б) $2a$ при $a\geqslant 0$; 0 при $a<0$. **С—12.** **1.** $4\sqrt{2}$. **2.** (64; 1); (1; 64). **С—13.** **1.** а) 6; б) 5. **2.** Первое больше. **3.** 2. **С—14.** **2.** а) 3; б) $\frac{1}{4}$. **3.** $D(y)=[2;\ \infty)$, $E(y)=[0;\ \infty)$. **С—15.** **1.** а) 0; б) $\frac{5}{6}$. **2.** а) $[-1;\ \infty)$; б) $(-\infty;\ -4)\cup(4;\ \infty)$. **С—16.** **1.** а) $\pm\sqrt{\frac{10}{3}}$; $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$; б) $-3{,}5$; 1. **2.** $\varnothing$. **С—17.** **1.** а) 4; б) -27. **2.** $3-\log_5 3+2\log_5|a|+\frac{1}{3}\log_5 b+\frac{5}{3}\log_5 x-\frac{1}{2}\log_5 y-3\log_5 z$. **3.** а) Равны; б) второе больше. **С—18.** **1.** а) Плюс; б) плюс. **2.** $(-\infty;\ -\sqrt{5})\cup(-\sqrt{5};\ -2)\cup(2;\ \sqrt{5})\cup(\sqrt{5};\ \infty)$. **3.** График получается из графика $y=\lg x$ симметрией относительно оси Oy. **С—19.** **1.** а) -1; 4; б) 0. **2.** а) $[0{,}5;\ 2\sqrt[3]{4}]$; б) $(-1;\ 0)\cup(0;\ \infty)$. **С—20.** **1.** а) 2; $\frac{1}{2\sqrt[3]{4}}$; б) 10; $0{,}1\sqrt{0{,}1}$. **2.** а) $(0;\ 10^{1-\sqrt{3}})\cup(10^{1+\sqrt{3}};\ \infty)$; б) $(\log_{15} 2;\ \infty)$.

С—21. а) (3; 6); (6; 3); б) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$; $\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \pi n\right)$,

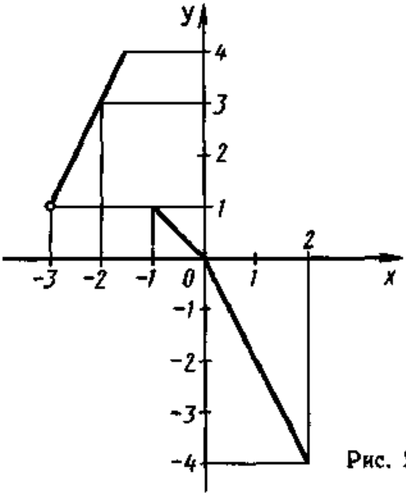

Рис. 27

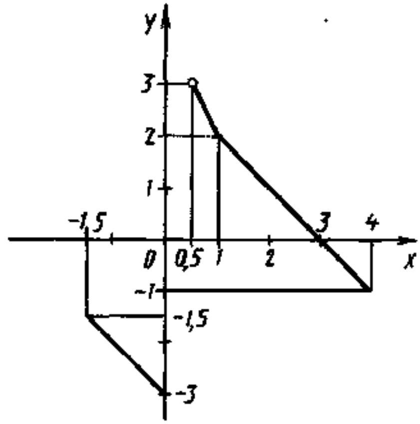

Рис. 28

$k\in \mathbf{Z}$, $n\in \mathbf{Z}$. **С—22.** **1.** а) $g(x)=\frac{1-x}{1+x}$, $D(g)=(-\infty;\ -1)\cup$ $\cup(-1;\ \infty)$, $E(g)=(-\infty,\ -1)\cup(-1;\ \infty)$; б) $g(x)=-\sqrt{2-x^2}$, $D(g)=[0;\ \sqrt{2}]$, $E(g)=[-\sqrt{2};\ 0]$. **2.** $g(-1)=-2$; $g(1)=2$; $g(3)=0$; $D(g)=[-1{,}5;\ 0]\cup[0{,}5;\ 4]$; $E(g)=[-3;\ -1{,}5]\cup[-1;\ 3)$ (рис. 28). **С—23.** **1.** а) $6e^{3+2x}$; б) $-5\ln 14\cdot 14^{0{,}2-5x}$. **2.** $y=x+2$. **3.** Убывает на $(-\infty;\ -2]$, возрастает на $[-2;\ \infty)$. **4.** $26\frac{26}{27}$. **С—24.** **1.** а) $\frac{1}{x-6}$; б) $\frac{3x^2+x^{-1{,}5}}{(x^3-2x^{-0{,}5})\ln 4}$. **2.** $y=\frac{2}{3\ln 3}x-\frac{2}{3\ln 3}+1$. **3.** Убывает на $(-1;\ -1+\sqrt{10}]$, возрастает на $[-1+\sqrt{10};\ \infty)$. **С—25.** **1.** $\sqrt{3}\,x^{\sqrt{3}-1}-$ $-1{,}5x^{-2{,}5}$. **2.** 0,0006. **3.** $\frac{e^{e+1}-1}{e+1}\approx 10{,}8097$. **С—26.** **1.** $y'=-0{,}4y$. **2.** $f(x)=3^{x+1}$. **3.** $y=A\cos\left(\frac{1}{2}t+\varphi\right)$.

Вариант 7

С—1. **1.** а) Да; б) нет. **С—2.** **1.** $2{,}5-\cos x$. **2.** а) $-x+\frac{1}{9}(6x-1)\times$ $\times\sqrt{6x-1}+C$; б) $-\frac{1}{64}\cos 8x+C$. **С—3.** а) $-\frac{2}{3}\cos(1{,}5x-1)+$ $+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$; б) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}(x-7)+\frac{x^3}{6}+C$. **С—4.** а) $2\sqrt{3}-1\frac{2}{3}$; б) 0,5. **С—5.** а) $86\frac{2}{3}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$. **С—6.** а) $1\frac{1}{3}$; б) $\frac{6-3\sqrt{3}}{4}$. **С—7.** 1200 м; 0,4 м/с^2. **С—8.** **1.** $\frac{7}{8}+\frac{3(2-\sqrt{3})}{4\pi}$. **2.** 2. **С—9.** **1.** $5\frac{1}{3}\pi$. **2.** $308\frac{1}{3}g$ Н. Решение. Подсчитаем давление на одну сторону стенки. Разобьем трапецию на полоски шириной

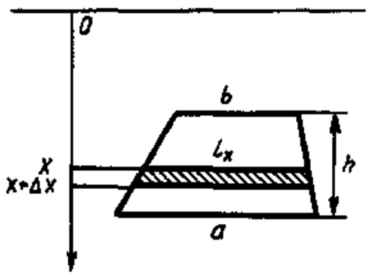

Рис. 29

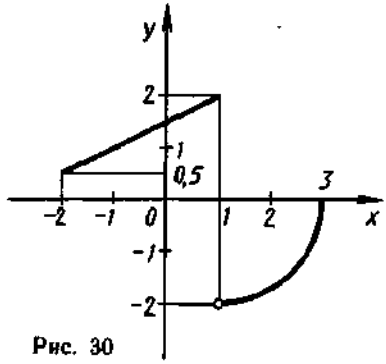

Рис. 30

$\Delta x=\frac{h}{n}$ (рис. 29). Найдем давление воды на полоску, верхнее основание которой лежит на глубине x. Длина верхнего основания равна $l_x=b+(a-b)\frac{x-c+h}{n}$, площадь приближенно равна $S_x\approx l_x\Delta x$. Давление воды на эту полоску приблизительно равно $p_x\approx S_xxg\approx g\left(bx+\frac{(a-b)(x-c+h)x}{n}\right)\Delta x$. Давление на одну сторону стенки есть $p=\int\limits_{c-h}^{c} g\left(bx+\frac{(a-b)(x-c+h)x}{n}\right)dx$, т. е. $g\int\limits_{5}^{10}\Big(6x+$ $+\frac{4(x-5)}{5}x\Big)dx=g\left(\frac{4}{15}x^3+x^2\right)\Big|_5^{10}=308\frac{1}{3}g$. **С—10. 1.** Нет. **2.** а) 3; б) 3,5. **3.** а) 2,7585; б) 3,2053. **4.** Первое больше. **С—11. 1.** При $a\geqslant 0$. **2.** а) 0; 16; б) $5^6=15\,625$. **3.** а) $2\sqrt{3}$; б) 1. **С—12. 1.** $\frac{2}{3}$. **2.** (8; 1); (−1; −8). **С—13. 1.** а) $2\frac{1}{125}$; б) b; 3. **2.** а) При $a\geqslant 0$; б) при всех a. **3.** $2x^{1,5}$. **С—14. 2.** а) Первое больше; б) равны. **3.** $D(y)=[0;\ \infty)$, $E(y)=(0;\ 1]$. **С—15. 1.** а) 1,5; б) −0,5; 4. **2.** а) (−0,25; 0); б) [0; 1]. **С—16. 1.** а) 6; б) $\frac{\pi(2n+1)}{4}$, $n\in \mathbf{Z}$. **2.** $[1;\ \infty)$. **С—17. 1.** $1{,}5+\frac{1}{3}\log_7 a+\frac{1}{3}\log_7|b|+\frac{1}{2}\log_7 c-$ $-\frac{1}{2}\log_7 d-\log_7 5-\frac{1}{2}\log_7 k$. **2.** $3(1-a-b)$. **3.** а) 2; б) 0. **С—18. 1.** а) Минус; б) плюс. **2.** $(3;\ 4)\cup(4;\ 7]$. **С—19. 1.** а) 1; б) 0,1; 100. **2.** а) $(-\infty;\ 0)\cup(2;\ \infty)$; б) (1,5; 2). **С—20. 1.** а) $\pm\sqrt{0,1}$; ± 100; б) 10. **2.** а) $(3;\ \infty)$; б) $(-\infty;\ \log_2 3)\cup(2;\ \infty)$. **С—21.** а) $\left(\frac{9+5\sqrt{3}}{2};\ \frac{9-5\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{9-5\sqrt{3}}{2};\ \frac{9+5\sqrt{3}}{2}\right)$; б) (2; 6). **С—22. 1.** а) $g(x)=\sqrt[3]{3-x}$, $D(g)=E(g)=\boldsymbol{R}$; б) $g(x)=\sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-1}$,

$D(g)=(0;\ 1]$, $E(g)=[0;\ \infty)$. **2.** $g(-1)=1$; $g(1)=2$; $g(2)=-\sqrt{3}$; $D(g)=[-2;\ 3]$; $E(g)=(-2;\ 0]\cup[0{,}5;\ 2]$ (рис. 30). **С—23.** **1.** а) $-14e^{2-14x}$; б) $-\ln 2\cdot 0{,}5^{0{,}5x+2}$. **2.** $y=2x$. **3.** $x_{\max}=-1$, $x_{\min}=1$. **4.** $2(e^2-3)$. **С—24.** 1. а) $\frac{3x^2-4x}{x^3-2x^2+1}$; б) $\frac{4}{3(2x-3)\ln 2}$. **2.** $7\ln 7$. **3.** $x_{\max}=\frac{1}{e}$, $x_{\min}=e$. **С—25.** **1.** Возрастает на $\left[0;\ \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right]$, убывает на $\left[\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1};\ \infty\right)$. **2.** 0,0025. **3.** $\frac{x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1}+\frac{x^{-\sqrt{2}+1}}{1-\sqrt{2}}+C$. **С—26.** **1.** Нет. **2.** $f(x)=5^{x-5}$. **3.** $y=4\cos\left(\sqrt{3}\,t+\frac{5\pi}{3}\right)$, $A=4$, $\omega=\sqrt{3}$, $\varphi=\frac{5\pi}{3}$.

Вариант 8

С—1. 1. а) Да; б) нет. **С—2.** 1. $\sin x+1{,}5$. **2.** а) $2x-\frac{1}{12}(8x+1)\sqrt{8x+1}+C$; б) $-\frac{1}{16}\cos 2x+C$. **С—3.** а) $\frac{2}{3}\sin(1{,}5x-1)+\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+C$; б) $\frac{2}{5}\operatorname{ctg}(2-x)-\frac{x^2}{6}+C$. **С—4.** а) $\frac{10\sqrt{5}-19}{3}$; б) 0,5. **С—5.** а) 6; б) $1-\frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$. **С—6.** а) $\frac{9}{8}$; б) $\frac{3\sqrt{3}}{4}-1$. **С—7.** $\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-1$; $2t-1$. **С—8.** 1. $3{,}5+\frac{12-6\sqrt{3}}{\pi}$. **2.** 1. **С—9.** **1.** 42π. **2.** $312g$ Н. Указание. См. вар. 7. **С—10.** **1.** Да. **2.** а) 1; б) 4,2. **3.** а) 3,0114; б) 3,5395. **4.** Первое больше. **С—11.** **1.** При всех b. **2.** а) 1; б) 729. **3.** а) $2\sqrt{2}$; б) $|\sqrt{a}-\sqrt{b}|$. **С—12.** 1. 3. **2.** (8; 1); (1; 8). **С—13.** **1.** а) 21; б) a; 3. **2.** а) При $a=0$; б) при $a\geqslant 0$. **3.** $\frac{x+y}{xy}$. **С—14.** **2.** а) Первое больше; б) равны. **3.** $D(y)=[-1;\ \infty)$, $E(y)=[0;\ \infty)$. **С—15.** **1.** а) 2; б) 0,5; 4. **2.** а) $\left(-\infty;\ -\frac{1}{4}\right)\cup(0;\ \infty)$; б) $(-\infty;\ -1]\cup[0;\ \infty)$. **С—16.** 1. а) $\frac{4}{3}$; б) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$. 2. $(-5;\ 3)\cup(4;\ \infty)$. С—17. **1.** $-2+\frac{7}{8}\log_5 b-\log_5 a$. **2.** $3(1-2a-b)$. **3.** а) 2; б) 0. **С—18.** 1. а) Плюс; б) минус. **2.** $(-2;\ -1)\cup(-1;\ 3]$. **С—19.** **1.** а) 2; б) 0,1; 1000. **2.** а) $(-\infty;\ 0)\cup(3;\ \infty)$; б) $(-1;\ \infty)$. **С—20.** **1.** а) ± 10; $\pm\sqrt{0{,}001}$; б) 10. **2.** а) $(-7;\ -1)\cup(2;\ \infty)$; б) $(1;\ \log_3 5)$. **С—21.** а) (5; 4); б) (5; 2). **С—22.** 1. а) $g(x)=0{,}5\sqrt[3]{1-x}$, $D(g)=E(g)=R$; б) $g(x)=-\sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-2}$, $D(y)=\left(0;\ \frac{1}{\sqrt{8}}\right)$, $E(g)=(-\infty;\ 0]$. **2.** $g(-2)$ не определено; $g(-1)=1-\sqrt{3}$; $g(3)=-1{,}5$; $D(g)=[-3;\ -2{,}5]\cup(-2;\ 4]$; $E(g)=[-2;\ 1)\cup[2;\ 3]$ (рис. 31).

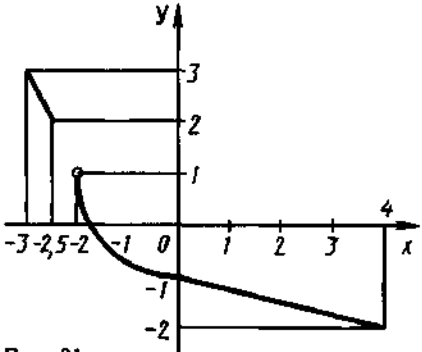

Рис. 31

С—23. **1.** а) $-7e^{4-7x}$; б) $-6\ln 2\cdot 4^{2-3x}$. **2.** $y=2$. **3.** $x_{\min}=\pm 1$, $x_{\max}=0$. **4.** $\frac{e^4-2e^3-e^2}{2}$. **С—24.** **1.** а) $\frac{4x^3-9x^2+1}{x^4-3x^3+x}$; б) $\frac{1}{(2x-80)\ln 3}$. **2.** $5\ln 5$. **3.** $x_{\min}=0{,}5$; $x_{\min}=2$; $x_{\max}=1$. **С—25.** **1.** Убывает на $\left[0; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\right]$, возрастает на $\left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}; \infty\right)$. **2.** 0,005. **3.** $\frac{x^{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1}+\frac{x^{-\sqrt{3}+1}}{1-\sqrt{3}}+C$. **С—26.** **1.** Нет. **2.** $f(x)=3^{2x-4}$. **3.** $y=2\cos\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)$; $A=2$; $\omega=2$; $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

Вариант 9

С—1. **1.** При $x\neq 0$ равенство $F'(x)=f(x)$ проверяется просто. При $x=0$ получаем $F'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x|x|-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$. **2.** а) Да; б) нет. **С—2.** **1.** $\sqrt{x^2-1}+1$. **2.** а) $\frac{2x+\sin 2x}{4}+C$. Указание. $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$; б) $-0{,}5\times\frac{1}{x^2+1}+C$. **С—3.** а) $2\operatorname{tg}(x-1)-\cos(4-3x)+x+C$; б) $\sin x-x\cos x+\frac{1}{3}\sqrt{(2x-1)^3}+C$. **С—4.** а) 4; б) 6. **С—5.** **1.** а) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$; б) $\frac{2}{9}(3^9-0{,}5^9)$. **2.** $A>10$; $A>1000$; $A>\frac{1}{\varepsilon}$. **С—6.** **1.** 1,5. Указание. $\frac{4}{x^2}=x-1$ при $x^3-x^2-4=0$; раскладывая левую часть на множители, получаем $(x^3-8)-(x^2-4)=(x-2)(x^2+2x+4-x-2)=(x-2)(x^2+x+2)$; это выражение обращается в нуль при $x=2$; следовательно (рис. 32), $\int\limits_1^2\frac{4}{x^2}\,dx-\int\limits_1^2(x-1)\,dx=-\frac{4}{x}\Big|_1^2-\frac{(x-1)^2}{2}\Big|_1^2=-2+4-0{,}5+0=1{,}5$. **2.** $12+2\pi$. Указание (рис. 33). Искомый интеграл равен сумме площадей прямоугольника $ABCD$ со сторонами 3 и 4 и полукруга радиуса 2. **С—7.** 30,06 м. **С—8.** **1.** $(3\pi+2):(9\pi-2)$. **2.** $\frac{8\pi-9\sqrt{3}}{64}$. **С—9.** **1.** $\frac{bh}{6}(2a+c)$. **2.** $\frac{m}{4}$ Дж. Решение. Пусть высота цилиндра равна H. Тогда плотность цилиндра равна $\rho=\frac{m}{V}=\frac{m}{\pi R^2H}$.

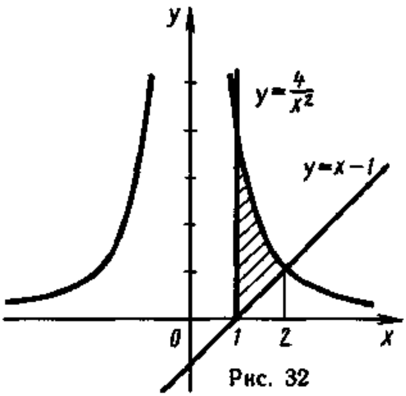

Рис. 32

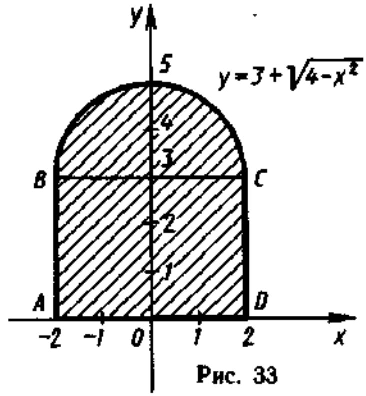

Рис. 33

Рассмотрим часть цилиндра, ограниченную цилиндрическими поверхностями радиусов x и $x+\Delta x$. Объем этой части приближенно равен $2\pi xH\Delta x$, масса $\frac{2mx\Delta x}{R^2}$, скорость $\frac{x}{R}$, кинетическая энергия $W_x\approx\frac{m_xV_x^2}{2}\approx\frac{mx^3\Delta x}{R^4}$. Поэтому $W=\int\limits_0^R\frac{mx^3dx}{R^4}=\frac{mx^4}{4R^4}\Big|_0^R=\frac{m}{4}\times\times\left(\frac{R^4}{R^4}-0\right)=\frac{m}{4}$. С—10. 1. Да. 2. Указание. Возведите обе части равенства в квадрат. 3. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt[3]{a}+\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b})$. 4. Второе. Указание. $\sqrt[3]{1992}-\sqrt[3]{1991}=\frac{1}{\sqrt[3]{1992^2}+\sqrt[3]{1991\cdot1992}+\sqrt[3]{1991^2}}<$ $<\frac{1}{\sqrt[3]{1991^2}+\sqrt[3]{1991\cdot1990}+\sqrt[3]{1990^2}}=\sqrt[3]{1991}-\sqrt[3]{1990}$. С—11. 1. 1. 2. а) 1; 8; -27. Указание. Перенесите все члены в левую часть и вынесите за скобки множитель $\sqrt[3]{x}-1$; б) 0; $\frac{14}{13}$. Указание. При $x\neq1$ поделим обе части уравнения на $\sqrt[3]{(x-1)^2}$, после чего получается квадратное уравнение $y^2-2y-3=0$ относительно $y=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$. 3. а) $-\sqrt[4]{a}$ при $b>0$, $a\neq b$; б) $-2a$ при $a\leqslant-\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$ при $-\sqrt{2}<a<$ $<\sqrt{2}$; $2a$ при $a\geqslant\sqrt{2}$. С—12. 1. 2; 11. Указание. Один из способов решения — обозначить первый корень через u, второй через v и решить систему уравнений $\begin{cases}u-v=1,\\u^3-v^3=7,\end{cases}$ второе уравнение которой получается при исключении x из уравнений замены. 2. (9; 1). Указание. Сложим и вычтем уравнения системы, в результате получим равносильную данной систему $\begin{cases}(\sqrt{x}+\sqrt{y})^3=64,\\(\sqrt{x}-\sqrt{y})^3=8.\end{cases}$

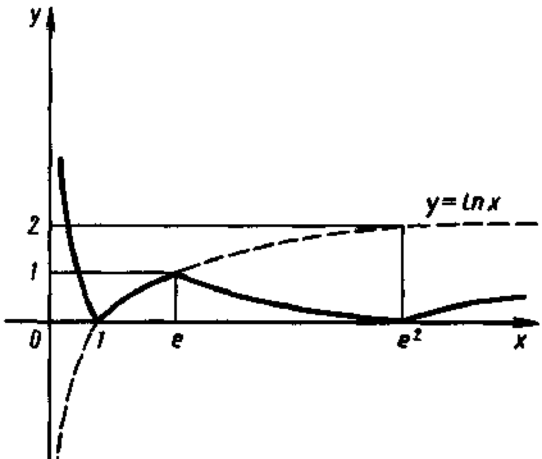

Рис. 34

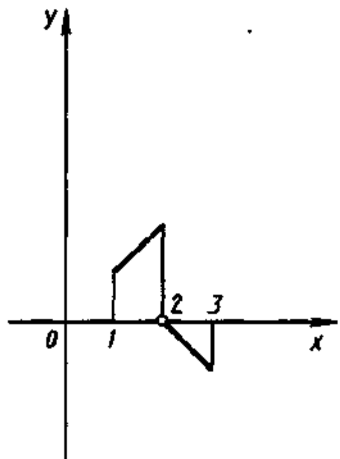

Рис. 35

С—13. 1. 12. Указание. Вынести из числителя каждой дроби (до возведения в куб) произведение $2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}$. 2. $\frac{m^2}{n^2}$. С—14. 1. Совпадает с графиком $y=\lg(x+1)$. 2. Второе больше. Указание. $(7-4\sqrt{3})^{3,8}=(7+4\sqrt{3})^{-3,8}$. 3. $D(y)=(-\infty;\ \log_2 3]\cup[\log_2 5;\ \infty)$; $E(y)=[0;\ \infty)$. С—15. 1. а) -1; 0; 1; б) 1,5. 2. а) $(2;\ 3)\cup(7;\ \infty)$; б) $(-1;\ 0)\cup(1;\ \infty)$. Указание. Неравенство равносильно неравенству $(x^2-1)(2^x-1)>0$, которое проще всего решить методом интервалов. С—16. 1. а) 0; ± 1. Указание. Пусть $y=2^x+2^{-x}$, тогда $2y^2-9y+10=0$; б) ± 2. Указание. Обозначим $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x$ через y, тогда $(\sqrt{5-2\sqrt{6}})^x=\frac{1}{y}$; решая квадратное уравнение $y^2-10y+1=0$, получаем $y_1=5+2\sqrt{6}$ (откуда $x_1=2$) или $y_2=5-\sqrt{6}$ (откуда $x_2=-2$, так как $5-2\sqrt{6}=(5+2\sqrt{6})^{-1}$). 2. $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi k\right)$, $k\in Z$. С—17. 1. $a(3+b)$. 2. $x+1$. 3. Первое. Указание. $\log_2 3>\log_2 2\sqrt{2}=1,5$, а $\log_3 5<\log_3 3\sqrt{3}=1,5$. С—18. 1. См. рис. 34. 2. 0. Указание. $\lg\operatorname{tg}1^\circ+\lg\operatorname{tg}89^\circ=\lg(\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}89^\circ)=\lg(\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{ctg}1^\circ)=\lg 1=0$, аналогично $\lg\operatorname{tg}2^\circ+\lg\operatorname{tg}88^\circ=0$ и т. д. 3. $(0;\ 10]\cup[1000;\ \infty)$. С—19. 1. а) 2; б) 3. Указание. Данное уравнение равносильно уравнению $x=3^{4-x}$, которое не может иметь более одного корня, так как левая часть — возрастающая функция, а правая — убывающая; один корень легко угадать: $x=3$. 2. а) $(3;\ 4)$; б) $(0;\ 1]$. Указание. Проверьте, что в любой точке области определения левая часть положительна. С—20. 1. а) 1; б) $[0,5;\ \infty)$. 2. а) 0,5; б) $\left(\frac{1}{25};\ \frac{1}{5}\right]$. Указание. Сделайте замену $y=\log_x 5$ или замену $z=\log_5 x$. С—21. а) $(-1; 1)$; $(4; 32)$; б) $(3; -1)$; $(0; 2\log_2 3-2)$. Указание. Из второго уравнения $x=0$ или $x=1-2y$. С—22. 1. в) и г). 2. Да (рис. 35). С—23. 1. $x_{max}=0,5$, $x_{min}=1$. 2. Совпадает с графиком $y=x^2-4x+1$ при $x^2-4x+1>0$. 3. Первое меньше. Указание. Достаточно сравнить натуральные логарифмы этих чисел, т. е. $\sqrt{3}\ln 2$ и $\sqrt{2}\ln 3$. Сравним числа $\frac{\ln 2}{\sqrt{2}}$ и $\frac{\ln 3}{\sqrt{3}}$. Эти два числа — значения функции $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ в точках 2 и 3. Функция f возрастает на промежутке $(0; e^2]$, так как $f'(x)=\frac{2-\ln x}{x\sqrt{x}}>0$ при $0<x<e^2$, поэтому $f(2)<f(3)$. 4. $\frac{2^{x^2-x}}{\ln 2}+C$.

С—24. 1. а) $\frac{2\log_3(x^3+\cos x)(3x^2-\sin x)}{(x^3+\cos x)\ln 3}$; б) $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. 2. $\ln 10$. 3. Убывает на $(0; 1]$ и на $[e; \infty)$, возрастает на $[1; e]$. С—25. 1. $x^x(1+\ln x)$. Решение. $x^x=e^{x\lg x}$ и $(x^x)'=(e^{x\ln x})'=e^{x\ln x}(x\ln x)'=x^x(1+\ln x)$. 2. $\approx -0,005$. 3. Возрастает на $[0; \sqrt{2}-1]$ и на $[1; \infty)$, убывает на $[\sqrt{2}-1; 1]$. С—26. 1. 15 ч. 2. $y=Ce^{\frac{x}{3}}$. Указание. Функция y^3 удовлетворяет дифференциальному уравнению $(y^3)'=y^3$ (так как $(y^3)'=3y^2y'$ по правилу дифференцирования сложной функции), поэтому $y^3=C_1e^x$, откуда $y=\sqrt[3]{C_1e^x}=Ce^{\frac{x}{3}}$, где $C=\sqrt[3]{C_1}$. 3. $y=\sqrt{3}\cos\left(\frac{1}{2}t+\frac{11\pi}{6}\right)$.

Вариант 10

С—1. 1. См. указание к вар. 9. 2. а) Да; б) нет. С—2. 1. $\sqrt{x^2+1}+1$. 2. а) $\frac{2x-\sin 2x}{4}+C$. Указание. $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$; б) $\sqrt{x^3+1}+C$. С—3. а) $-2\operatorname{ctg}(x+1)+\frac{3}{4}\sin(4x-3)+C$; б) $x\sin x+\cos x-\frac{1}{3}\sqrt{(1+2x)^3}+C$. Указание. $(x\sin x)'=\sin x+x\cos x$. С—4. а) 4; б) $23\frac{1}{3}$. С—5. а) -3; б) $\frac{1}{15}-\frac{1}{53}=\frac{38}{795}$. С—6. 1. 1. Указание. $\frac{9}{x^2}=x-2$ при $x^3-2x^2-9=0$; имеем $x^3-2x^2-9=(x^3-27)-2(x^2-9)=(x-3)(x^2+x+3)$, это выражение обращается в нуль только при $x=3$, далее, $S=\int\limits_2^3\frac{9}{x^2}dx-\int\limits_2^3(x-2)^2dx=-\frac{9}{x}\Big|_2^3-\frac{(x-2)^3}{2}\Big|_2^3=1$ (ср. с вар. 9). 2. $18-4,5\pi$. Указание. Искомый интеграл равен разности площадей прямоугольника со сторонами 3 и 6 и полукруга 3 (рис. 36).

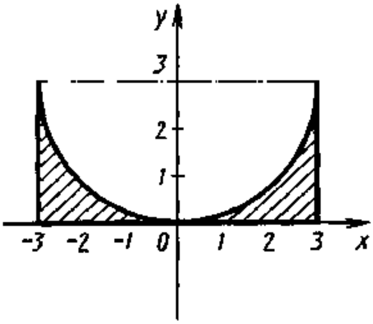

Рис. 36

С—7. $432\frac{11}{12}$ м. С—8. 1. $(3\pi+2):(9\pi-2)$. 2. $\frac{4\pi-8-\sqrt{3}}{64}$. С—9. 1. $\frac{h}{6}((2A+a)B+(A+2a)b)$. 2. $\pi r^3\rho g$ Н, где ρ — плотность воды, g — ускорение свободного падения. Решение. Площадь части сферы, заключенной между плоскостями, проведенными на глубине x и $x+\Delta x$, равна $S_x=$ $=2\pi r\Delta x$, давление на эту часть $p_x\approx xS_x\rho g\approx 2\pi r\rho gx\Delta x$. Поэтому $p=\int\limits_0^r 2\pi r\rho gxdx=2\pi r\rho g\int\limits_0^r xdx=$ $=2\pi r\rho g\frac{x^2}{2}\Big|_0^r=\pi r^3\rho g$. С—10. 1. Да. 2. Указание. Возведите обе части равенства в квадрат. 3. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b})$. 4. Второе больше (см. указание к вар. 9). С—11. 1. $\sqrt{1081}$. 2. а) -1; 8; б) 0; $\frac{7}{9}$ (см. указание к вар. 9). 3. а) $\sqrt[4]{ab}$ (при $a>0$, $b>0$, $a\neq b$); б) 2 при $1\leqslant x\leqslant 2$; $2\sqrt{x-1}$ при $x>2$; не определено при $x<1$. С—12. 1. 1 (см. указание к вар. 9). 2. (8; 1); $(-8; 1)$; $(8; -1)$; $(-8; -1)$. Указание. После деления первого уравнения системы на второе получим $\frac{x\sqrt[3]{x}}{y\sqrt[3]{y}}=16$, откуда $\frac{x}{y}=\pm 8$, т. е. $x=\pm 8y$. С—13. 1. 20 (см. указание к вар. 9). 2. $\frac{b}{a}$. С—14. 1. Совпадает с графиком $y=\log_2(2-2x)$. 2. Второе больше. Указание. $(5-2\sqrt{6})^{3,3}=(5+2\sqrt{6})^{-3,3}$. 3. $D(y)=(-\infty;\ \log_3 4]\cup$ $\cup[\log_3 5;\ \infty)$, $E(y)=[0;\ \infty)$. С—15. 1. а) -1; б) 1,5. 2. а) $(-\infty; -5]\cup[2; 3)$; б) $(-3; 0)\cup(3; \infty)$. Указание. Неравенство равносильно неравенству $(x^2-9)(3^x-1)>0$, которое проще всего решить методом интервалов. С—16. 1. а) 0; ± 1. Указание. Пусть $y=3^x+3^{-x}$, тогда $3y^2-16y+20=0$, откуда $y=2$ или $y=\frac{10}{3}$; б) ± 2 (см. указание к вар. 9). 2. $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{2}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n\in\mathbf{Z}$. Указание. Данное неравенство равносильно неравенству $\operatorname{tg}x>\operatorname{ctg}x\Leftrightarrow\operatorname{ctg}2x<0$. С—17. 1. $\frac{3-3a}{1+b}$. 2. $\log_2 x+1$. 3. Первое больше. Решение. $\log_3 5>\frac{10}{7}>\sqrt{2}$. Действительно, $\frac{10}{7}>\sqrt{2}$, так как $\frac{100}{49}>2$, а $\log_3 5>\frac{10}{7}$, так как $5>3^{\frac{10}{7}}$, поскольку $5^7>3^{10}$

$(5^7=625\cdot 125>625\cdot 100=250^2>243^2=3^{10})$. **С—18. 1.** $y=1-\ln x$ при $0<x\leqslant e$, $y=\ln x-1$ при $e<x\leqslant e^2$, $y=3-\ln x$ при $e^2<x\leqslant e^3$, $y=\ln x-3$ при $x>e^3$. **2.** 0. Указание. Среди множителей есть $\lg\operatorname{tg}45°=\lg 1=0$. **3.** $(0;\ 0{,}0001]\cup[0{,}1;\ \infty)$. **С—19. 1.** а) 3; б) $\frac{1}{25}$. **2.** а) $(2;\ \infty)$; б) $\varnothing$. Указание. Область определения неравенства — $(9;\ 10]$, а при $9<x\leqslant 10$ левая часть неравенства положительна. **С—20. 1.** а) -1; б) $\left[\frac{1}{9};\ \infty\right)$. **2.** а) $\left(0;\frac{1}{8}\right)\cup(4;\ \infty)$; б) $\left(0;\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right]\cup[2;\ \infty)$. **С—21.** а) $(1;\ 6)$; $(2;\ 7)$; $(3;\ 8)$; б) $(-2;\ -8)$. Указание. Рассмотрите два случая: $\begin{cases}x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0\end{cases}$ и $\begin{cases}x\leqslant 0,\\ y\leqslant 0.\end{cases}$ После деления второго уравнения на первое в первом случае получим $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=-2$, что невозможно, а во втором случае получим $\frac{\sqrt{-y}}{\sqrt{-x}}=2$ и после подстановки y в первое уравнение получим $(\sqrt{-x})^4=4$, откуда $x=-2$. **С—22. 1.** в) и г). **2.** Да; например, $y=-x-1$ при $-1\leqslant x\leqslant 0$, $y=x+1$ при $0<x\leqslant 1$. **С—23. 1.** $x_{max}=1$. **2.** Совпадает с графиком $y=0{,}01|x+1|$, где $x\neq -1$. **3.** Второе больше. Указание. Сравним натуральные логарифмы этих чисел и поделим обе части на πe, получим, что достаточно сравнить числа $\frac{\ln\pi}{\pi}$ и $\frac{\ln e}{e}$. Эти числа — значения функции $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ в точках π и e; $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ и $f'(x)<0$ при $x>e$, следовательно, f убывает на промежутке $[e;\ \infty)$, в частности, $f(e)>f(\pi)$. **4.** $\frac{4^{x^3+x}}{2\ln 2}+C$. **С—24. 1.** а) $\frac{2(2x-\cos x)\log_2(x^2-\sin x)}{(x^2-\sin x)\ln 2}$; б) $-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. **2.** $\ln 26-\ln 7$. **3.** Возрастает на $(0;\ 0{,}1]$ и на $[1;\ \infty)$, убывает на $[0{,}1;\ 1]$. **С—25. 1.** $x^x(1+\ln x)$. Указание. $(\sqrt{x})^{2x}=((\sqrt{x})^2)^x=x^x$, далее см. решение вар. 9. **2.** $\approx 0{,}00625$. **3.** Возрастает на $\left[0;\frac{2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right]$ и на $[2;\ \infty)$, убывает на $\left[\frac{2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}};2\right]$. **С—26. 1.** 7,5 ч. **2.** $y=Ce^{0{,}5x}$.

Решение. Пусть $y(x)$ — решение этого дифференциального уравнения, тогда функция $f(x)=y^2$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $f'(x)=f(x)$ (так как $f'(x)=2yy'$ по правилу дифференцирования сложной функции), откуда $f(x)=C_1e^x$. Далее, $C_1\geqslant 0$ и $y=\sqrt{f(x)}=Ce^{0{,}5x}$, где $C=\sqrt{C_1}$. **3.** $y=4\cos\left(\sqrt{3}t+\frac{2\pi}{3}\right)$.

Повторительные самостоятельные работы

Вариант 1

ПС—1. **1.** 194. **2.** На 25%. **ПС—2.** **1.** $\frac{300}{17}\% \approx 17{,}6\%$. **2.** $y=2x-9$. **ПС—3.** **1.** 0. **2.** -10. **ПС—4.** **1.** $(-\infty;\ 0{,}5]\cup[1;\ \infty)$; $(0{,}5;\ 1)$. **2.** $(x-2)(x-5)$. **3.** $5x^2+26x+5=0$. **ПС—5.** **1.** $2{,}5+0{,}9n$; 145,5. **2.** 2,1. **3.** $2\frac{19}{55}$. **ПС—6.** **1.** а) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha$; $-\frac{1}{2}$; б) $-\operatorname{tg}\alpha$. **ПС—7.** **1.** а) $\frac{\pi n}{4}$, $n\in\mathbf{Z}$; б) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}2+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **2.** а) $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; б) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$. **ПС—8.** **1.** а) $(0;\ 5]$; б) $[2\pi n;\ \pi+2\pi n]$, $n\in\mathbf{Z}$. **2.** а) Нечетная; б) четная; в) ни четная, ни нечетная. **3.** Рис. 37. **ПС—10.** **1.** а) $9x^2+2\sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1}$; б) xe^x+e^x; в) $\frac{7}{(x+2)^2}$. **2.** $204x(x^2-1)^{101}$. **ПС—11.** **1.** а) $(-\infty;\ -3)\cup(2;\ \infty)$; б) $(2;\ 3]$ и $x=-1$; в) $(\infty;\ 1)\cup\cup(2;\ 4)\cup(4;\ \infty)$. **2.** $y=9x-11$. **3.** 82 м/с. **ПС—12.** **1.** $(1;\ \infty)$. **2.** См. рис. 38, 39. **ПС—13.** **1.** $\min\limits_{[-3;\ 1]} f=f(-3)=-11$; $\max\limits_{[-3;\ 1]} f==f(-1)=9$. **2.** $5\sqrt{3}$ см. Указание. $V=\frac{1}{3}\pi R^2H=\frac{1}{3}\pi H(l^2--H^2)$, $V'(H)=0$ при $H=\frac{l}{\sqrt{3}}$. **ПС—14.** **1.** а) $\frac{x^3}{3}-3\cos x+C$; б) $\operatorname{tg}x-\frac{1}{3}\sin(3x-1)+C$. **2.** а) -24; б) 0,5. **3.** 9. **ПС—15.** **1.** 16. **2.** а) 2; б) 2. **3.** $(-1;\ 7)$. **ПС—16.** **1.** а) ±1; б) 3. **2.** $(-2;\ 1)$. **3.** $(2;\ 1)$; $(1;\ 2)$. **ПС—17.** **1.** $3e^{3x}+\ln2\cdot0{,}5^{2x-2}$. **2.** $0{,}5e^{2x}-\frac{3^x}{\ln3}+C$. **3.** $y=2\ln 2x+2-8\ln2$. **ПС—18.** **1.** а) $\frac{3}{3x-1}$; б) $(\sqrt{3}+1)x^{\sqrt{3}}++\sqrt{3}\,x^{\sqrt{3}-1}$. **2.** а) $\frac{1}{3}\ln|3x+1|+C$; б) $\frac{(2x+7)^{\sqrt{5}+1}}{2(\sqrt{5}+1)}+C$. **3.** Да.

Вариант 2

ПС—1. **1.** 322. **2.** $66\frac{2}{3}\%$. **ПС—2.** **1.** 6,25%. **2.** $y=2{,}5-0{,}5x$. **ПС—3.** **1.** $\frac{a+b}{2a+b-1}$. **2.** 11. **ПС—4.** **1.** $\varnothing$, $\mathbf{R}$. **2.** $(x+3)(x+6)$.

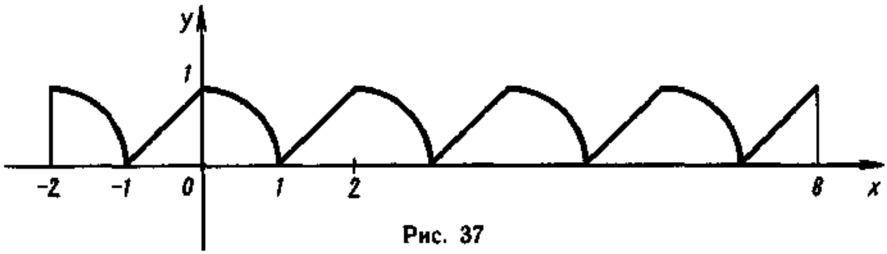

Рис. 37

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;2)$	2	$(2;\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	18	↘	−14	↗
		max		min	

Рис. 38

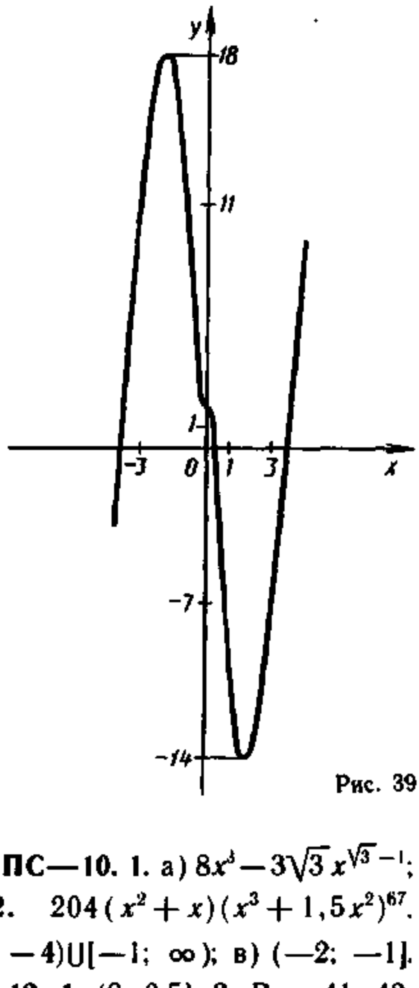

Рис. 39

3. $3x^2+10x+3=0$. **ПС—5.** 1. $4{,}9+0{,}8n$; 266. 2. $-2\frac{4}{7}$. 3. $1\frac{5}{11}$. **ПС—6.** 1. а) $\sin\alpha$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $-\operatorname{ctg} a$. **ПС—7.** 1. а) $\frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$; $n\in \mathbf{Z}$; б) $\frac{\pi}{4}+\pi n$; $\operatorname{arctg} 3+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. 2. а) $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $n\in \mathbf{Z}$; б) $\left(-\frac{5\pi}{6}+\pi n;\ -\frac{\pi}{6}+\pi n\right]$, $n\in \mathbf{Z}$. **ПС—8.** 1. а) $(0;\ 3]$; б) $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n\in \mathbf{Z}$. 2. а) Нечетная; б) четная; в) ни четная, ни нечетная. 3. См. рис. 40. **ПС—10.** 1. а) $8x^3-3\sqrt{3}\,x^{\sqrt{3}-1}$; б) $1+\ln x$; в) $-\frac{7}{(x-2)^2}$. 2. $204(x^2+x)(x^3+1{,}5x^2)^{67}$. **ПС—11.** 1. а) $(-5;\ 3)$; б) $(-\infty;\ -4)\cup[-1;\ \infty)$; в) $(-2;\ -1]$. 2. $y=26\frac{2}{3}x-55$. 3. 130 м/с. **ПС—12.** 1. $(0;\ 0{,}5]$. 2. Рис. 41, 42. **ПС—13.** 1. $\min\limits_{[-2;3]} f=f(-2)=-21$; $\max\limits_{[-2;3]} f=f(3)=79$. 3. $10\sqrt{\frac{2}{3}}$ см. **ПС—14.** 1. а) $\frac{x^4}{4}-2\sin x+C$; б) $-\operatorname{ctg} x+\frac{1}{3}\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+C$. 2. а) 51; б) $\frac{1}{3}$. 3. $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$. **ПС—15.** 1. 9. 2. а) $\varnothing$; б) -1. 3. $(0;\ 2)\cup(8;\ \infty)$. **ПС—16.** 1. а) ± 1; б) 8. 2. $(-\infty;\ -1)\cup(2;\ \infty)$. 3. $(4;\ 2)$. **ПС—17.** 1. $-0{,}3e^{-0{,}3x}-2^{2-2x}\ln 2$. 2. $\frac{2^x}{\ln 2}-2e^{-0{,}5x}+C$. 3. $y=6\ln 3\cdot x+3-12\ln 3$. **ПС—18.** 1. а) $\frac{2}{2x+1}$; б) $2(\sqrt{2}+1)\,x^{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1}$. 2. а) $0{,}5\ln|2x-1|+C$; б) $\frac{(2x-3)^{\sqrt{6}+1}}{2(\sqrt{6}+1)}+C$. 3. Да.

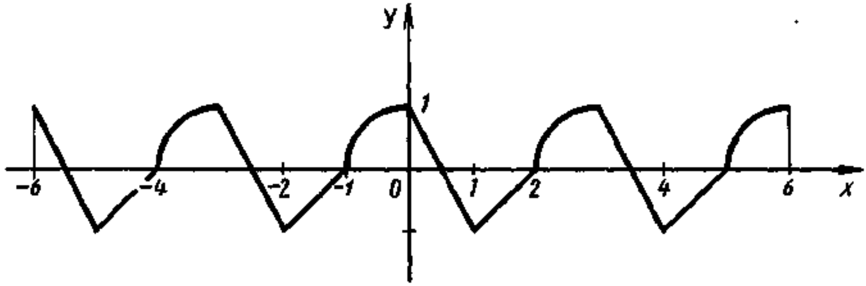

Рис. 40

x	$(-\infty; -1)$	−1	$(-1; 1)$	1	$(1; \infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	−1	↗	3	↘
		min		max	

Рис. 41

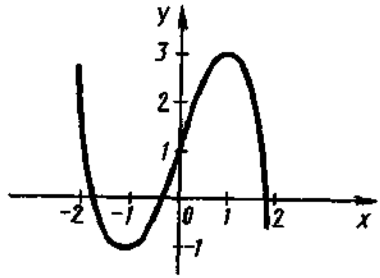

Рис. 42

Вариант 3

ПС—1. **1.** а) 3; б) $\frac{14-5\sqrt{3}}{11}$. **2.** а) -2; б) -3, 3; в) 1. **ПС—2.** **1.** $x_1=1$, $x_2=\frac{c}{a}$. **2.** $(-\infty;\ -3)\cup(1;\ \infty)$. **3.** 45, 20. **ПС—3.** **1.** Не может. **2.** Уравнение не имеет корней. **ПС—4.** **1.** -1, 1, 2. **2.** $(-\infty;\ -10)\cup(10;\ \infty)$. **ПС—5.** **1.** $\frac{3}{16}$. **2.** 610. **3.** $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$. **ПС—6.** **1.** Наибольшее значение равно 2. **2.** $2\cos\alpha$. **ПС—7.** 1. а) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$; б) указание. $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)^2$, $n\in \boldsymbol{Z}_0$; $\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)^2$, $n\in \boldsymbol{Z}_0$; в) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **2.** $\left[\frac{\pi}{24}+\pi n;\ \frac{17\pi}{24}+\pi n\right]$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **ПС—8.** **1.** а) $[-2;\ 1)$; б) $\left[-\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **ПС—9.** Указание. б) $y=2\log_2 x$; в) $y=2\sin 2x$. **ПС—10.** 1. 6 см/с. **2.** 135°, $y=-x-3{,}5$. **ПС—11.** **1.** x — любое действительное число. **2.** $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+0{,}5x-2$; $f'(2)<0$. **3.** $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 3)$. **ПС—12.** **1.** а) $(-\infty;\ -3]\cup[3;\ \infty)$; 0; б) $[3;\ \infty)$. **2.** Убывает на $(-\infty;\ 1]$, возрастает на $[1;\ \infty)$; $x=1$ — точка минимума, $f(1)=-2$; нули функции: $x_1=0$, $x_2=2$; функция ограничена сверху числом 1 (рис. 43); $f(x)<1$, $x\in \boldsymbol{R}$.

ПС—13. 1. $\max\limits_{[-1;\ 2]} f(x)=f(-1)=\dfrac{27\frac{1}{3}}{\ln 3}$; $\min\limits_{[-1;\ 2]} f(x)=f(1)=\dfrac{6}{\ln 3}$. 2. Слагаемые 4, 8, 6. **ПС—14.** 1. $F(x)=2\operatorname{tg} x+\sqrt{2}\cos x-3$. **2.** а) $\ln 2-0{,}5\approx 0{,}2$; б) $1\frac{1}{3}$. **ПС—15. 1.** а) 18; б) 1. **2.** а) $\log_4 3$; б) 5. **ПС—16. 1.** а) $\left(\frac{1}{3};\ 3\right)$; б) 4. **2.** (1; 2). **ПС—17. 1.** Возрастает на $(-\infty;\ 1]$, убывает на $[1;\ \infty)$; $x=1$ — точка максимума, $y(1)=3e$. **2.** 1. **ПС—18. 1.** а) $\ln\sqrt{1{,}8}$; б) 1. **3.** $y=x+(\ln 4-3)$.

Вариант 4

ПС—1. 1. а) 2; б) $\dfrac{19+6\sqrt{2}}{17}$. **2.** а) -3; б) -2; 2; в) 64. **ПС—2. 1.** $x_1=-1$, $x_2=-\dfrac{c}{a}$. **2.** $(-\infty;\ -2)\cup(1;\ \infty)$. **3.** 42. **ПС—3. 1.** Да. Значение данного выражения равно 5 при $x=3$. **2.** Уравнение не имеет корней. **ПС—4. 1.** -3; -1; 1. **2.** $(-\infty;\ -6)\cup$ $\cup(6;\ \infty)$. **ПС—5. 1.** $\frac{2}{9}$. **2.** $\frac{1023}{1024}$. **3.** $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **ПС—6. 1.** Наименьшее значение выражения равно -2. **2.** $2\sin\alpha$. **ПС—7. 1.** а) πn, $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; б) у к а з а н и е. $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)^2$, $n\in\mathbf{Z}_0$; $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)^2$, $n\in\mathbf{N}$; в) $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n$, $n\in\mathbf{Z}$. **2.** $\left[-\frac{11\pi}{24}+\pi k;\ \frac{5\pi}{24}+\pi k\right]$, $k\in\mathbf{Z}$. **ПС—8. 1.** а) $[-2;\ 3)$; б) $\left[-\frac{\pi}{3}+\pi k;\ \frac{\pi}{3}+\pi k\right]$, $k\in\mathbf{Z}$. **ПС—9. 1.** У к а з а н и е. б) $y=\log_2 x$; в) $y=3\sin 2x$. **ПС—10. 1.** 12 см/с. **2.** $\alpha=135°$, $y=-x+3{,}5$. **ПС—11. 1.** x — любое действительное число. **2.** $f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}-$ $-2(2-0{,}5x)^3$, $f'(2)<0$. **3.** $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 4)$. **ПС—12. 1.** а) $(-\infty;$ $-4]\cup[4;\ \infty]$; 0; б) $(-\infty;\ 3]$; в) убывает на $(-\infty;\ -1]$; возрастает на $[-1;\ \infty)$; $x=-1$ — точка минимума, $f(-1)=-0{,}5$; график пересекает ось абсцисс в точках $x_1=0$, $x_2=-2$; функция ограничена сверху (рис. 44); $f(x)<1$, $x\in\mathbf{R}$. **ПС—13. 1.** $\max\limits_{[-1;\ 2]} f(x)=$

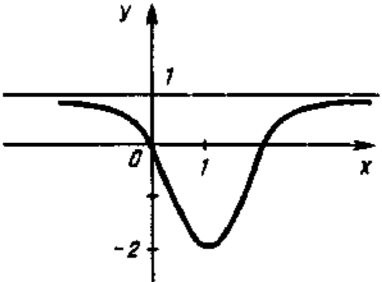

Рис. 43

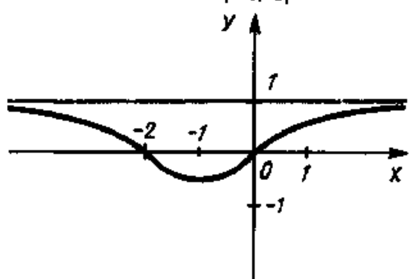

Рис. 44

$=f(-1)=162\frac{1}{9}$, $\min\limits_{[-1;\ 2]} f(x)=f(1)=27$. **2.** Слагаемые 12; 4, 8. **ПС—14. 1.** $F(x)=-3\ \mathrm{ctg}\ x+\sqrt{2}\sin x+2$. **2.** а) $\ln 4-1\approx 0{,}39$; б) $10\frac{2}{3}$. **ПС—15. 1.** а) $5\frac{1}{3}$; б) 1. **2.** а) 1; б) 4. **ПС—16. 1.** а) $\left(\frac{1}{9};\ 9\right)$; б) 3. **2.** (2; 1). **ПС—17. 1.** Убывает на $(-\infty;\ -1]$, возрастает на $[-1;\ \infty)$; $x=-1$ — точка минимума, $y(-1)=-\frac{2}{e^2}$. **2.** 1. **ПС—18. 1.** а) $\frac{1}{3}\ln 1{,}6$; б) 1. **3.** $y=x+(\ln 4-1)$.

Вариант 5

ПС—1. 1. 0. **2.** 2,25 и 3 м. **ПС—2. 1.** 25%. **2.** $y=8-3x$. **ПС—3. 1.** $\frac{x^2\sqrt{y}}{x^4-y}$. **2.** -3. **ПС—4. 1.** $\left[-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3}\right]$; $\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{3};\ \infty\right)$. **2.** $(2x+5)^2$. **3.** $12x^2+x-1=0$. **ПС—5. 1.** $5\frac{3}{4}$; $\frac{9}{8}$. **2.** $-\frac{17}{65}$. **3.** $\frac{3}{14}$. **ПС—6. 1.** а) $\mathrm{ctg}\ \alpha$; $\sqrt{2}+1$; б) $\sin^2 x$. **ПС—7. 1.** а) $\frac{\pi n}{4}$; $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{4}+\pi n$; $\mathrm{arcctg}\ 3+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **2.** а) $\left(-\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ -\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) $\left[\frac{7\pi}{36}+\frac{\pi n}{3};\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{3}\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **ПС—8. 1.** а) $(-\infty;\ -3]$; б) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; в) $\left(2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **2.** а) Нечетная; б) четная; в) ни четная, ни нечетная. **3.** См. рис. 45. **ПС—10. 1.** а) $16x^3-2\sqrt{5}\,x^{\sqrt{5}-1}-\frac{1}{x^2}$; б) $2^x(1+(x-1)\ln 2)$; в) $\frac{x-\ln x-1}{(x-1)^2}$. **2.** $3\sin 6x$. **3.** $y=\frac{3}{2}\sin 2t$. **ПС—11. 1.** а) $(-\infty;\ -2)\cup(-2;\ 1]\cup[3;\ \infty)$; б) $(3;\ 6)\cup(6;\ \infty)$; в) $(-\infty;\ 0)\cup(2;\ 3)$. **2.** $y=3x-2$, $y=3x+2$. **3.** $6(1-2\sin 2t)$ Н. **ПС—12. 1.** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup(0;\ 1]$. **2.** См. рис. 46. **ПС—13. 1.** $\max\limits_{[-1;3]} f=f(3)=10$; $\min\limits_{[-1;\ 3]} f=f(2)=-4\frac{1}{3}$. **3.** $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Указание. $S=$

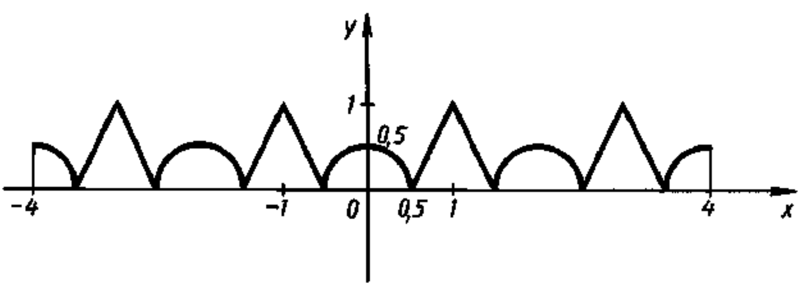

Рис. 45

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1,5)$	$1,5$	$(1,5; \infty)$
$f'(x)$	+	0	+	0	−
$f(x)$	↗	2	↗	$3\frac{11}{16}$	↘
				max	

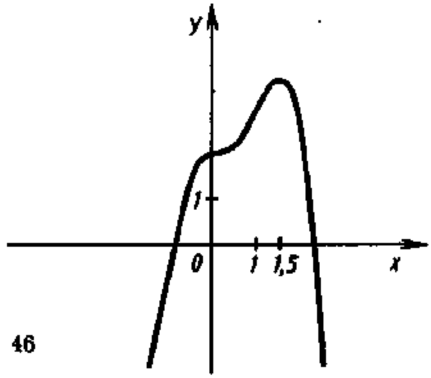

Рис. 46

$=2\pi R^2+2\pi RH=2\left(\pi R^2+\frac{V}{R}\right)$, так как $H=\frac{V}{\pi R^2}$. Далее, $S'(R)=0$ при $R^3=\frac{V}{2\pi}$. **ПС—14.** **1.** $-\sqrt{5-2x}-\frac{1}{5}\cos 5x+x+C$. **2.** $\frac{x^4}{4}+x-$ $-\frac{3}{2}\operatorname{tg} 2x-2$. **3.** а) $1-\sqrt{3}$; б) $\frac{5}{3}$. **4.** 36. **ПС—15.** **1.** 0. **2.** а) 1,5; б) $\pm\sqrt{\frac{7}{3}}$. **3.** (1; 3]. **ПС—16.** **1.** а) 1; 16; б) 4. **2.** [0,01; 10]. **3.** (2; 3); (3; 2). **ПС—17.** **1.** $2xe^{x^2-1}+2^x\ln 2$. **2.** $\frac{2^x}{\ln 2}-e^{-x}-\frac{2}{\ln 2}+\frac{1}{e}+2$. **3.** $x_{\min}=1$, $x_{\max}=e$. **ПС—18.** **1.** а) $\frac{3}{3x-1}\left(1+\frac{1}{\ln 2}\right)$; б) $(\sqrt{3}-1)\times$ $\times(x+1)^{\sqrt{3}-2}$. **2.** а) $12-5\ln 5$; б) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{2}+1)}$. **3.** $y=e^{6-2x}$.

Вариант 6

ПС—1. **1.** 0. **2.** 2,36 и 2 м. **ПС—2.** **1.** $33\frac{1}{3}\%$. **2.** $y=3x-10$. **ПС—3.** **1.** $\frac{b-c^4}{c^2\sqrt{b}}$. **2.** 4. **ПС—4.** **1.** $(-0,25; 0,5)$; $(-\infty; -0,25]\cup$ $\cup[0,5; \infty]$. **2.** $(9x-1)(x-1)$. **3.** $20x^2+x-1=0$. **ПС—5.** **1.** $12\frac{1}{3}$; $-1\frac{4}{9}$. **2.** $-\frac{95}{612}$. **3.** $\frac{31}{70}$. **ПС—6.** **1.** а) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; $4-2\sqrt{2}$; б) $\operatorname{ctg}^2 x$. **ПС—7.** **1.** а) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$; πn, $n\in \mathbf{Z}$, б) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. **2.** а) $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi n; \frac{\pi}{3}+\pi n\right)$, $n\in \mathbf{Z}$; б) $\left[\frac{7\pi}{12}+\pi n; \frac{3\pi}{4}+\pi n\right)$, $n\in \mathbf{Z}$. **ПС—8.** **1.** а) $(-\infty; -3]\cup[1; 5)$; б) $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in \mathbf{Z}$; в) $\left(2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in \mathbf{Z}$. **2.** а) Ни четная, ни нечетная; б) четная; в) нечетная. **3.** См. рис. 47. **ПС—10.** **1.** а) $5\sqrt{3}\,x^{\sqrt{3}-1}-8x+\frac{68}{x^3}$; б) $0,5^x(1-(x+1)\ln 2)$;

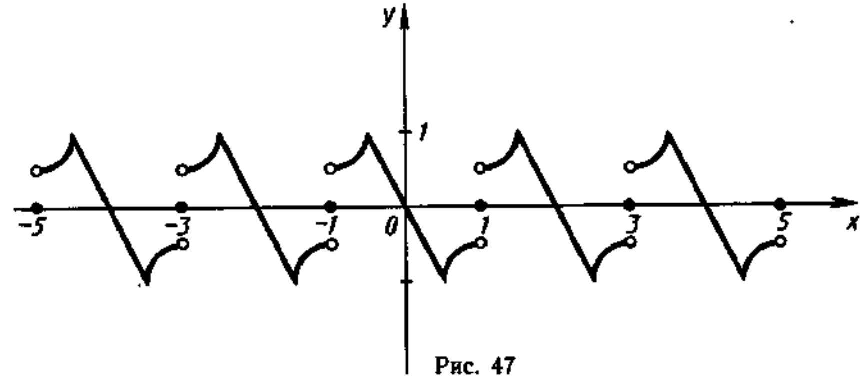

Рис. 47

в) $\frac{x^2 \ln x+\ln x+1-x^2}{(1-x^2)^2}$. 2. $-\frac{1}{3}\sin\frac{2x}{3}$. 3. $y=-\frac{2}{3}\sin 3t$. **ПС—11. 1.** а) $(-2; -1]$ и $x=-3$; б) $[1; \infty)$; в) $(-\infty; 0)\cup(1; 2)$. **2.** $y=0{,}25x$. **3.** $(12t-2\cos t)$ Н. **ПС—12. 1.** $(-1; 0)\cup(0{,}5; \infty)$. **2.** См. рис. 48. **ПС—13. 1.** $\max\limits_{[-1;\,3]} f=f(3)=193$; $\min\limits_{[-1;\,3]} f=f(2)=-60$. **3.** $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. Указание. $S=\pi R^2+2\pi RH=\pi R^2+\frac{2V}{R}$ $\left(\text{так как } H=\frac{V}{\pi R^2}\right)$. Далее, $S'(R)=0$ при $R^3=\frac{V}{\pi}$. **ПС—14. 1.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x-\frac{1}{3}\sqrt{(2x-3)^3}+2x+C$. **2.** $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x+2\frac{1}{3}$. **3.** а) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-1\right)$; б) 1,2. **4.** 4,5. **ПС—15. 1.** 1. **2.** а) 4; б) 2; $2^9=512$. **3.** $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$. **ПС—16. 1.** а) 2; б) 5. **2.** $\left(\frac{7}{3}; \infty\right)$. **3.** $(-1; -1)$; $(-1; 2)$; $(2; -1)$. **ПС—17. 1.** $2xe^{x^2+1}+2^x\ln 2$. **2.** $e^x-\frac{3^{-x}}{\ln 3}+\frac{3}{\ln 3}-\frac{1}{e}+3$. **3.** $x_{\max}=0{,}1$, $x_{\min}=1$. **ПС—18. 1.** а) $\frac{3\ln 2-3}{(3x+1)\ln 2}$; б) $(\sqrt{2}+1)(x-1)^{\sqrt{2}}$. **2.** а) $24-7\ln 7\approx 10{,}3786$; б) $\frac{\pi-e}{(e+1)(\pi+1)}$. **3.** $y=e^{\frac{4-x}{3}}$.

Вариант 7

ПС—1. 1. 2. **2.** 18%. **ПС—2. 1.** 21,6 см; 19,44 см². **2.** $\left(\frac{1}{5}; \frac{10}{3}\right]$. **ПС—3. 1.** $b\left(a^{\frac{1}{3}}+b\right)$. **2.** $-1{,}5$. **ПС—4. 1.** $(-\infty; -5]\cup[-0{,}2; \infty)$; $[-5; -0{,}2]$. **2.** $2\left(x-\frac{5-\sqrt{33}}{4}\right)\left(x-\frac{5+\sqrt{33}}{4}\right)$. **3.** $x^2-2\sqrt{7}x+6=0$. **ПС—5. 1.** 13. **2.** 4 или $\frac{4}{3}$. **3.** $\frac{7}{65}$. **ПС—6. 1.** а) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; б) $-\operatorname{tg} 3\alpha$. **ПС—7. 1.** а) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$; $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$; б) πn; $\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$.

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1,5)$	1,5	$(1,5;\infty)$
$f'(x)$	−	0	−	0	+
$f(x)$	↘	0	↘	$-1\frac{11}{16}$	↗
		нет экстремума		min	

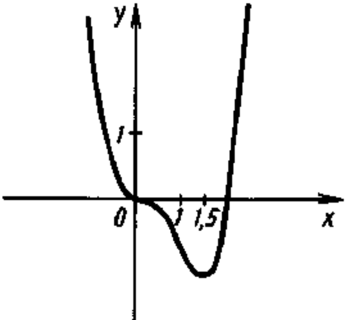

Рис. 48

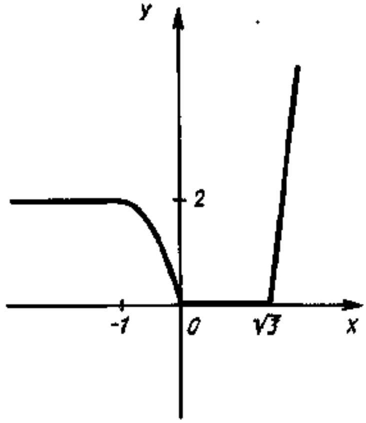

Рис. 49

2. а) $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$; б) $\left[\frac{\pi n}{5};\ \frac{\pi}{15}+\frac{\pi n}{5}\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

ПС—8. 1. а) $(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 2]$; б) $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in \boldsymbol{Z}$; в) $(0;\ 1)\cup(1;\ \pi)\cup(2\pi k;\ \pi+2\pi k)$, $k\in \boldsymbol{N}$. **2.** а) Ни четная, ни нечетная; б) четная; в) четная. **3.** а) $\frac{2\pi}{3}$; б) π; в) π.

ПС—10. 1. а) $(4\sqrt{2}\,x^3-2\sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1})\sqrt{x+1}+\frac{\sqrt{2}\,x^4-2x^{\sqrt{2}}}{2\sqrt{x+1}}$; б) $\frac{(x\ln x-1)\,e^x}{x\ln^2 x}$; в) $\cos x-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{tg}\,\frac{x}{4}}{\cos^2\frac{x}{4}}$. **2.** $1842\,(x^2+x)\times$ $\times(2x^3+3x^2)^{306}$. **3.** $y\,(t)=2\sqrt{2}\,\cos\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$. **ПС—11. 1.** а) $(0;\ 2]$ и $x=3$; б) $[2;\ \infty)$ и $x=1$; в) $(-3;\ -1)\cup\left(-\frac{1}{3};3\right)$. **2.** $y=-10x-1$ и $y=-10x+\frac{785}{27}$. **3.** $\left(4-\frac{2}{t^3}+\frac{1}{t^2}\right)$ Н. **ПС—12. 1.** См. рис. 49 (на промежутках $[-1;\ 0]$ и $[\sqrt{3};\ \infty)$ график совпадает с $y=x^3-3x$). **2.** См. рис. 50. **ПС—13. 1.** Наибольшего значения не существует; $\min\limits_{(-2;\ 1)} f=f(0)=5$. **3.** $\sqrt{6}$. У к а з а н и е. Пусть r и h — радиус основания и высота конуса. Тогда $r^2+h^2=3^2=9$, $V=\frac{1}{3}\pi h\,(9-h^2)$, $V'(h)=0$ при $h=\sqrt{3}$, при этом $r=\sqrt{9-h^2}=\sqrt{6}$. **ПС—14. 2.** $\frac{x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1}-\frac{3x^4}{4}-\frac{1}{x+2}+C$. **3.** а) $\frac{2}{3}$; б) $36\frac{4}{7}$. **4.** $10\frac{2}{3}$. **ПС—15. 1.** 24. **2.** а) 1; 5,5; б) 3; 9. **3.** $(-\infty;\ -2]\cup[3;\ \infty)$. **ПС—16. 1.** а) ±1; б) 4.

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	−	0	+
$f(x)$	↗	3	↘	1	↘	−1	↗
		max				min	

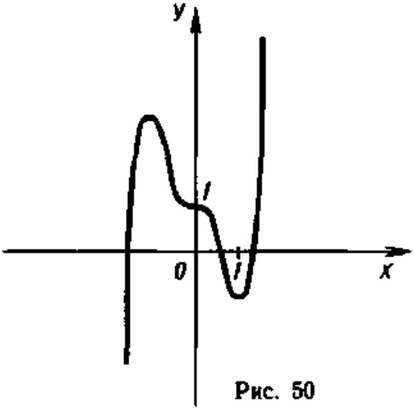

Рис. 50

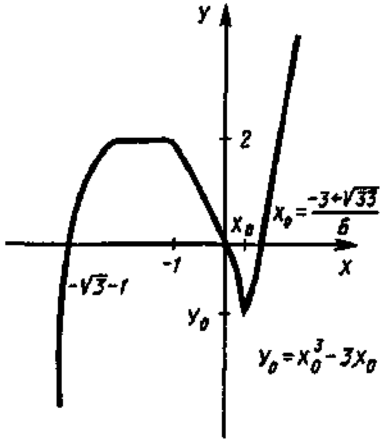

Рис. 51

2. $(-1;\ 1)\cup(3;\ 5)$. **3.** $(5;\ 3)$. **ПС—17. 1.** $\sin x^{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x}\sin x \ln \sin x\right)$. **2.** $e^{x^2-x}+C$. **3.** Решение. Функция f возрастает на промежутке $[0;\ \infty)$, так как $f'(x)=e^x-1>0$ при $x>0$, поэтому $f(x)>f(0)$ при $x>0$, откуда $e^x>x+1$ при $x>0$. **ПС—18. 1.** $\frac{x^{\sqrt{2}+2}}{\sqrt{2}+2}-\frac{x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1}+$ $+\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}\ln x+C$. **2.** а) Совпадает с графиком $y=x$ при $x>0$ (при $x\leqslant 0$ функция f не определена); б) совпадает с графиком функции $y=x^{\log_{10}2}$ при $x\neq 0$. **3.** $y=Ce^{-\sqrt{2}x}$.

Вариант 8

ПС—1. 1. 8. **2.** 25%. **ПС—2. 1.** 14,4 см; 8,64 см^2. **2.** $\left[-3;\ \frac{1}{3}\right)$. **ПС—3. 1.** $b^{\frac{1}{3}}\left(b^{\frac{1}{3}}-2a\right)$. **2.** $\frac{4}{3}$. **ПС—4. 1.** $\left[-6;\ -\frac{1}{6}\right]$; $(-\infty;\ -6]\cup$ $\cup\left[-\frac{1}{6};\ \infty\right)$. **2.** $3\left(x-\frac{2+\sqrt{10}}{3}\right)\left(x-\frac{2-\sqrt{10}}{3}\right)$. **3.** $x^2-2\sqrt{6}x+$ $+2=0$. **ПС—5. 1.** 10 или 15. **2.** $-13{,}5$ или $-6{,}75$. **3.** $\frac{14}{65}$. **ПС—6. 1.** а) $0{,}5\sin 2\alpha$; б) -1. **ПС—7. 1.** а) $\frac{3\pi}{4}+\pi n$; $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; б) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$. **2.** а) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; б) $\left(-\frac{\pi}{12}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$. **ПС—8. 1.** а) $(-\infty;\ -8)\cup$

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	-13	↗	0	↗	3	↗
		min					

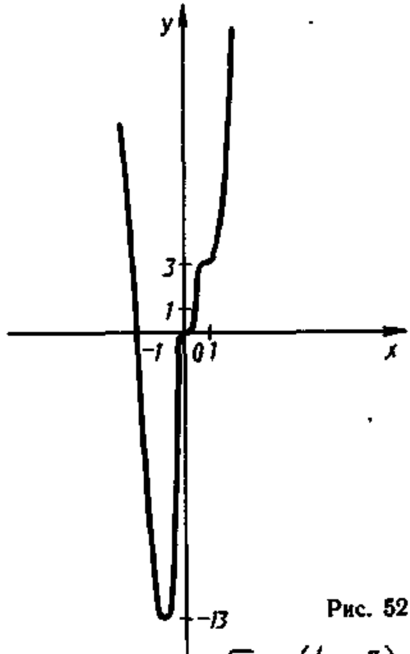

Рис. 52

$\cup(-8;\ -1]\cup\left[\frac{1}{3};\ 2\right)$; б) $\left[\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+\pi n\right]$, $n\in \boldsymbol{Z}$; в) $(0;\ 1)\cup\left(1;\ \frac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in \boldsymbol{N}$. **2.** а) Нечетная; б) нечетная; б) четная. **3.** а) $\frac{2\pi}{5}$; б) 2π; в) π. **ПС—10. 1.** а) $5\sqrt{3}(x^4-x^{\sqrt{3}-1})\sqrt{x-1}+\frac{(\sqrt{3}x^5-5x^{\sqrt{3}})}{2\sqrt{x-1}}$; б) $\frac{1-x\ln x}{xe^x}$; в) $3\cos 3x-\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}+\frac{2}{3}\frac{\operatorname{ctg}\frac{x}{3}}{\sin^2\frac{x}{3}}$. **2.** $714(x-x^2)(3x^2-2x^3)^{118}$. **3.** $y(t)=3\sqrt{2}\cos\left(\frac{t}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$.

ПС—11. 1. а) $(-\infty;\ -3]\cup[-1;\ 0)\cup(0;\ \infty)$ и $x=-2$; б) $(-1;\ 0)$; в) $(-\infty;\ -3)\cup\left(\frac{1}{3};\ 1\right)\cup(3;\ \infty)$. **2.** $y=-24x+9$. **3.** $\left(30t+\frac{5}{t^2}\right)$ Н. **ПС—12. 1.** См. рис. 51 (на промежутках $(-\infty;\ -\sqrt{3}-1]$ и $[x_0;\ \infty)$ график совпадает с $y=(x+1)^3-3(x+1)$, а на $[-1;\ x_0]$ — с $y=x^3-3x$). **2.** См. рис. 52. **ПС—13. 1.** $\max\limits_{(-1;\ 1)} f=f(0)=-3$; наименьшего значения не существует. **2.** $\frac{4}{\sqrt{3}}$. У к а з а н и е. Пусть r и h — радиус основания и высота цилиндра. Тогда $V=\pi r^2h=\pi h(16-h^2)$, $V'(h)=0$ при $h=\frac{4}{\sqrt{3}}$. Далее, $V(0)=V(4)=0$, $V\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)>0$. **ПС—14. 2.** $\frac{x^{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{2}\cos(2x+1)+\frac{1}{2(2x+1)}+C$. **3.** а) $\frac{1}{8}-\frac{\pi}{32}$; б) $54\frac{6}{7}$. **4.** 9. **ПС—15. 1.** 3^{17}. **2.** а) 8; $\sqrt[3]{2}$; б) $\frac{1}{5}$; $5^5=3125$. **3.** $(-\infty;\ 3{,}5]\cup[6{,}5;\ \infty)$. **ПС—16. 1.** а) 1; б) -1. **2.** $(2;\ 3)$. **3.** $(2;\ 1)$. **ПС—17. 1.** $\cos x^{\sin x}\left(\cos x\ln\cos x-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)$. **2.** $e^{x^3+x}+C$. **3.** У к а з а н и е. f возрастает на промежутке $[0;\ \infty)$ (так как $f'(x)=2^x\ln 2-\ln 2>0$ при $x>0$), поэтому $f(x)>f(0)=0$ при $x>0$. **ПС—18. 1.** $\frac{x^{\sqrt{3}+2}}{\sqrt{3}+2}+\frac{x^{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1}+2e^{0{,}5x}+2\ln x+C$. **2.** а) $f(x)=-1$

на своей области определения, $D(f)=(0;\ 1)\cup(1;\ \infty)$; б) $f(x)=\frac{2}{x}$ при $0<x\leqslant 1$, $f(x)=2x$ при $x>1$. **3.** $y=Ce^{\frac{x}{\sqrt{3}}}$.

Вариант 9

ПС—1. 1. Указание. Предположив противное, возведите обе части неравенства в куб. **2.** 10%. **3.** $\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}}$; 2. **ПС—2. 1.** 30 см, 30 см^2. **2.** $(-6;\ -2]\cup[-0{,}5;\ 6)$. **ПС—3. 1.** $\frac{16+c^3}{16-c^3}$ $(c>0)$. **2.** $\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$. **ПС—4. 1.** $(\sqrt{3}x-1)(\sqrt{3}x+1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$. **2.** $|b|>1$. **3.** 7. Указание. Проверьте, что корни существуют (дискриминант положителен), и примените теорему Виета. **ПС—5. 1.** 37,5 или 52,5. **2.** $\frac{10^{1992}-10-9\cdot 1991}{81}$. **3.** $(p-1)\cdot 2^p+1$. **ПС—6. 1.** б) $\frac{1}{128}$. **3.** Указание. Подставьте $\gamma=\pi-\alpha-\beta$ в обе части равенства. **ПС—7. 1.** а) $\varnothing$; б) $\frac{10\pi n}{7}$ $(n\neq 7k)$, $\frac{5\pi}{9}+\frac{10\pi n}{9}$ $(n\neq 9k+4)$, $n,\ k\in\mathbf{Z}$. **2.** а) $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \pi n\right]\cup\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; б) $\left[-\frac{\arccos 0{,}25}{\pi}+2n;\ -\frac{1}{3}+2n\right]\cup\left[\frac{1}{3}+2n;\ \frac{\arccos 0{,}25}{\pi}+2n\right]$ и $x=1+2n$, $n\in\mathbf{Z}$. **ПС—8. 1.** а) $\left[\arcsin\frac{1}{3}+2\pi k;\ \frac{\pi}{6}+2\pi k\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\ \pi-\arcsin\frac{1}{3}+2\pi k\right]$, $k\in\mathbf{Z}$; б) $(8;\ \infty)$; в) $\left(2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$. **2.** а) Четная; б) ни четная, ни нечетная; в) нечетная. **3.** $(-\infty;\ -3]\cup[3;\ \infty)$. **ПС—9. 2.** а) Совпадает с графиком $y=|x|-1$ при $|x|>1$ (при остальных x функция не определена); г) см. рис. 53. **ПС—10. 1.** а) 0; б) $\frac{5(\sqrt{3}\,x^{\sqrt{3}-1}-2x^{-2})}{(x^{\sqrt{3}}+2x^{-1})\ln 10}$; в) $\left(\frac{x}{2}\right)^x(\ln x+1-\ln 2)$. **2.** См. рис. 54. **ПС—11. 1.** а) $\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2};\ \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$; б) $\left(-3;\ \frac{81-9\sqrt{97}}{8}\right)$; в) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\ -\frac{\pi}{3}+\pi k\right]\cup\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \pi k\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \frac{\pi}{3}+\pi k\right]$, $k\in\mathbf{Z}$. **2.** $y=1$ и $y=12x-47$. **ПС—12. 1.** Убывает на $(-\infty;\ -1-\sqrt{3}]$ и на $[0;\ -1+\sqrt{3}]$, возрастает на $[-1-\sqrt{3};\ 0]$ и на $[-1+\sqrt{3};\ \infty)$; $x_{\min}=-1\pm\sqrt{3}$; $x_{\max}=0$. **2.** Убывает на $(-\infty;\ -1)$ и на $(-1;\ 0]$, возрастает на $[0;\ 1)$ и на $(1;\ \infty)$, $x_{\min}=0$, уравнение касательной $y=-\frac{8}{9}x-\frac{22}{9}$. **ПС—13. 1.** $-\frac{3}{4}\leqslant f(x)\leqslant 1{,}5$. **2.** 2. Указание. Пусть радиус основания и высота цилиндра объемом V равны r и h. Тогда $S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+\frac{2V}{r}$. Далее, $S'(r)=4\pi r-\frac{2V}{r^2}$, $S'(r)=0$ при $4\pi r^3=2V$, т. е. $4\pi r^3=2\pi r^2h$, откуда $2r=h$, т. е. $h:r=2$. **ПС—14. 1.** $\frac{e^x\sin x-e^x\cos x}{2}+C$. Указание. Сложите равенства

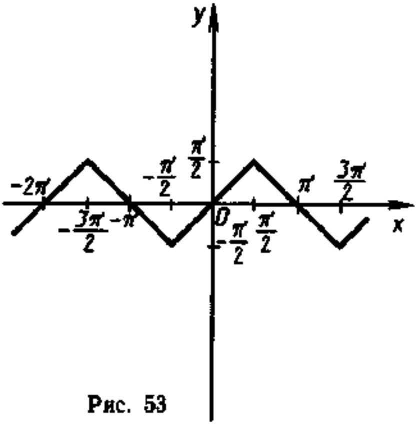

Рис. 53

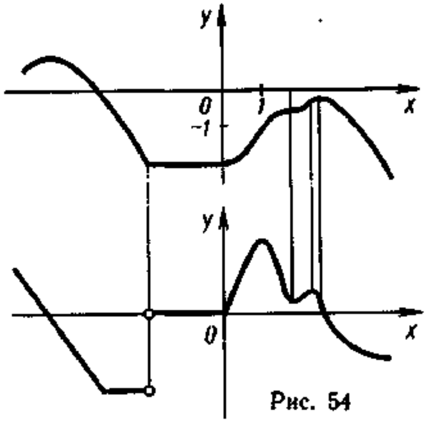

Рис. 54

$-(e^x \cos x)' = -e^x \cos x + e^x \sin x$ и $(e^x \sin x)' = e^x \cos x + e^x \sin x$ и результат разделите на 2. Другой способ: можно применить формулу интегрирования по частям. **2.** а) 38,4; б) 0. **4.** $2\frac{2}{3}$.
ПС—15. 1. $\log_b N$. **2.** а) $\sqrt[10]{10}$. Указание. Перейдите к логарифмам по основанию 10; б) 2. Указание. Корень $x=2$ угадывается легко; других корней нет, так как левая часть — возрастающая функция. **3.** $(0{,}01;\ \infty)$. Указание. Замена $y=3^{\lg x+2}$.
ПС—16. 1. а) 10; б) 1. Указание. Возведите равенство $\sqrt[3]{x+7}=\sqrt{x+3}$ в шестую степень, после чего («угадав» корень $x=1$) разложите левую часть полученного уравнения $x^3+8x^2+13x-22=0$ на множители (например, способом группировки): $(x-1)(x^2+9x+22)=0$. **2.** $[1;\ 4]$. **3.** $(6;\ 10)$; $(10;\ 6)$. Указание. Сделайте замену переменных $u=\sqrt[4]{x+y}$, $v=\sqrt[4]{xy+21}$.
ПС—17. 1. $g'=2\ln 2y$. **2.** $g(x)^{h(x)}\left(\frac{h(x)}{g(x)}g'(x)+h'(x)\ln g(x)\right)$.
Решение. По формуле производной сложной функции $(e^{h(x)\ln g(x)})'=e^{h(x)\ln g(x)}(h(x)\ln g(x))'$. **3.** Указание. Проверьте равенство $F'(x)=f(x)$. **ПС—18. 1.** Указание. $f(x)=x-\ln(1+x)$ возрастает на промежутке $[0;\ \infty)$ (так как $f'(x)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}>0$ при $x>0$), в частности, $f(x)>f(0)=0$ при $x>0$. **2.** $F(x)=\frac{1}{2}\ln^2 x+\ln 2\ln x+\frac{x^{\pi+1}}{\pi+1}+C$. **3.** $x(t)=22{,}5\cdot 2^{\frac{t}{3}}$.
Указание. Общее решение дифференциального уравнения $x'=kx$ есть $x(t)=Ce^{kt}$. Осталось найти C и k из системы уравнений, получаемой подстановкой в общее решение значений $t=3$ и $t=6$:

$$\begin{cases}Ce^{3k}=45,\\ Ce^{6k}=90\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}Ce^{3k}=45,\\ e^{3k}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2C=45,\\ e^{k}=2^{\frac{1}{3}},\end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases}C=22{,}5,\\ e^{kt}=2^{\frac{t}{3}}.\end{cases}$$

Вариант 10

ПС—1. 1. Возведите обе части равенства в квадрат. **2.** 20%. **3.** $-\frac{\sqrt{t+2}}{\sqrt{t-2}}$; $-1{,}5$. **ПС—2. 1.** 84 см; 210 см^2. **2.** $(-4;\ -3)\cup$ $\cup\left(-\frac{1}{3};\ 4\right)$. **ПС—3. 1.** $\frac{c^4+9}{c^4-9}$. **2.** $\varnothing$. **ПС—4. 1.** $(x^2+2)(2x^2+1)$. **2.** $|b|\geqslant 1{,}5$. **3.** 56. Указание. Проверьте, что корни существуют (дискриминант положителен), и примените теорему Виета. **ПС—5. 1.** 4; 5 или $-11\frac{2}{7}$; $-2\frac{9}{14}$ (если считать, что a_9 и a_4 — целые числа, то второе решение надо отбросить). **2.** $\frac{10^{1993}-10-9\cdot 1992}{27}$. **3.** $\frac{9}{4}-\frac{9+6p}{4\cdot 3^p}$. **ПС—6. 1.** а) $\frac{\sin 2a}{2^{n-1}\sin\frac{a}{2^n}}$; б) -1. **ПС—7. 1.** а) $\frac{\pi}{4}+$ $+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Указание. Модуль левой части не больше 2, а модуль правой части не меньше 2; б) $-\frac{\pi}{30}+\frac{\pi n}{5}$; $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$. Указание. Преобразуйте уравнение к виду $\sin 7x+\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=0$. **2.** а) $\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ 2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; б) $\left[-\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbf{Z}$. **ПС—8. 1.** а) $\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n\right]\cup\left[\arccos\frac{1}{4}+2\pi n;\quad 2\pi-\arccos\frac{1}{4}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbf{Z}$; б) $\left(\frac{1}{8};\ 1\right)$; в) $\left(2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbf{Z}$. **2.** а) Нечетная; б) нечетная; в) четная. **3.** $(-\infty;\ -2)\cup(2;\ \infty)$. **ПС—9. 2.** а) Совпадает с графи-

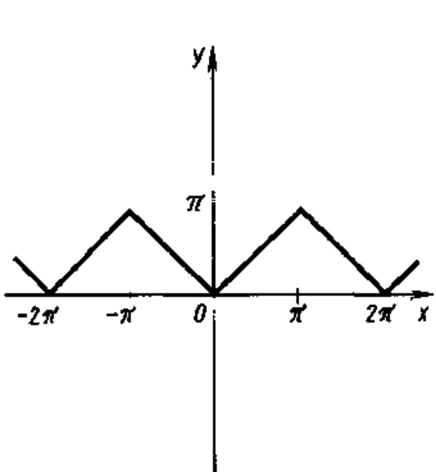

Рис. 55

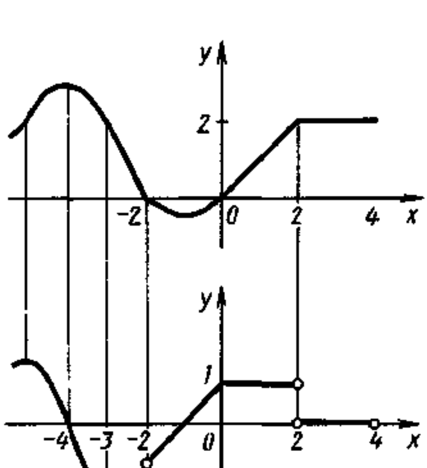

Рис. 56

ком $y=\frac{1}{|x+1|-1}$ при $|x+1|>1$ (при остальных x функция не определена); г) см. рис. 55. **ПС—10. 1.** а) 0; б) $2^{(x-1)^{15}} \ln 2 \times \times 15(x-1)^{14}$; в) $\ln x^{\ln x}\left(\frac{\ln \ln x+1}{x}\right)$. Указание. $\ln x^{\ln x}= =e^{\ln x \ln \ln x}$. **2.** См. рис. 56. **ПС—11. 1.** а) $(-4; -3)\cup(-2{,}5; -2)$; б) $\left(\frac{81-9\sqrt{97}}{8}; 3\right)$; в) $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi n; -\frac{\pi}{4}+\pi n\right]\cup\left[\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right]\cup \cup\left(\frac{\pi}{3}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **2.** $y=-4$ и $y=-8x-12$. Указание. Запишите уравнение касательной в произвольной точке $(x_0; x_0^2-2x_0-3)$ графика (получив уравнение $y=2(x_0-1)x- -x_0^2-3$) и определите, при каких x_0 касательная проходит через точку $M(-2; -4)$; получим $x_0=1$ или $x_0=-3$. **ПС—12. 1.** Убывает на $\left(0; \frac{1}{e}\right]$ и на $[e\sqrt{e}; \infty)$, возрастает на $\left[\frac{1}{e}; e\sqrt{e}\right]$, $x_{\min}=\frac{1}{e}$, $x_{\max}=e\sqrt{e}$. **2.** Возрастает на $(-\infty; -1)$ и на $(-1; 0]$, убывает на $[0; 1)$ и на $(1; \infty)$, $x_{\max}=0$, уравнение касательной $y=-\frac{8}{3}x+\frac{25}{3}$. **ПС—13. 1.** $\frac{1-\sqrt{2}}{2}\leqslant f(x)\leqslant\frac{3+\sqrt{3}}{4}$. **2.** $\sqrt{2}$. Указание. Пусть радиус основания, высота и образующая конуса объемом V равны r, h и l. Тогда $h=\frac{3V}{\pi r^2}$, $S=\pi rl=\pi r\sqrt{r^2+h^2}=\pi\sqrt{r^4+\frac{9V^2}{\pi^2r^2}}$. Достаточно найти наименьшее значение функции $f(x)=r^4+\frac{9V^2}{\pi^2r^2}$ на $(0; \infty)$; $f'(r)=4r^3-\frac{18V^2}{\pi^2r^3}$, $f'(r)=0$ при $18V^2=4\pi^2r^6$, т. е. $9V^2= =\pi^2r^4h^2=2\pi^2r^6$, откуда $h^2=2r^2$ и $h:r=\sqrt{2}$. При этом f убывает на $(0; r_0]$ и возрастает на $[r_0; \infty)$, $r_0=\sqrt[6]{\frac{9V^2}{2\pi^2}}$, поэтому при $r=r_0$ функция достигает наименьшего значения на $(0; \infty)$. **ПС—14. 1.** $\frac{e^x(\cos x+\sin x)}{2}+C$ (см. указание к вар. 9). **2.** а) $-132\frac{4}{15}$, б) 0. Указание. $\sin x\sin 2x=\frac{1}{2}(\cos x-\cos 3x)$. **4.** 11,25. **ПС—15. 1.** 0. **2.** а) $\pm 0{,}5$. Указание. При $|x|>1$ левая часть не превосходит 0,5, а правая не меньше $\frac{1}{\sqrt{2}}$, при $|x|\leqslant 1$ получаем уравнение $2^{-|x|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, корни которого $\pm\frac{1}{2}$; б) 3 (см. указание к вар. 9). **3.** $\left(2\pi n; \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n\right)\cup\left(\pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **ПС—16. 1.** а) 10; б) $-\frac{1}{3}$; 1. **2.** $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right]$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **3.** (6; 3); (3; 1,5). **ПС—17. 1.** $y'=-2\ln 3\cdot y$. **2.** Указание. f возрастает на промежутке $[0; \infty)$ (так как $f'(x)=-e^{-x}+1>0$ при $x>0$), в частности, $f(x)>f(0)=0$ при $x>0$. **3.** Указание.

Проверьте, что $f'(x)=f(x)$. ПС—18. 1. $\frac{g(x)h'(x)\ln g(x)-h(x)g'(x)\ln h(x)}{h(x)g(x)\ln^2 g(x)}$.

2. $(0;\ e^{\frac{1}{e}}]$. Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{\ln x}{x}}$. При x, приближающихся к 0, значения $f(x)$ неограниченно приближаются к 0 (при этом $f(x)>0$ для любого x). Далее, $f'(x)=$ $=e^{\frac{\ln x}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}$, $f'(x)=0$ при $x=e$, $f'(x)>0$ при $0<x<e$, поэтому f возрастает на промежутке $(0;\ e]$, при этом в силу непрерывности f ее значения пробегают промежуток $(0;\ f(e)]$, $f'(x)<0$ при $x>e$, поэтому f убывает на промежутке $[e;\ \infty)$ и все ее значения лежат в промежутке $(0;\ f(e)]$, так как f положительна при всех x. Замечание. Можно доказать, что при $x\geqslant e$ значения f лежат в промежутке $(1;\ f(e)]$, но для решения данной задачи это несущественно. 3. $x(t)=15\cdot 4^{0{,}2t-1}$ (см. указание к вар. 9).

Примерные контрольные работы

К—1. *Вар. 1.* 2. а) $-4\cos x+C$; б) $F(x)=-4\cos x$. 3. 4. 4. а) 4,5; б) $\frac{2}{3}$. 5*. 4,5. *Вар. 2.* 2. а) $8\sin x+C$; б) $F(x)=8\sin x$. 3. 24. 4. а) $5\frac{1}{3}$; б) $2\frac{2}{3}$. 5*. 4,5. *Вар. 3.* 2. а) $-\frac{2}{3}\cos 3x+C$; б) $-\frac{2}{3}\cos 3x-\frac{2}{3}$. 3. 63. 4. а) $10\frac{2}{3}$; б) $1\frac{1}{3}$; 5*. $2\pi\approx 6{,}28$. *Вар. 4.* 2. а) $1{,}5\sin 2x+C$; б) $1{,}5\sin 2x-1{,}5$. 3. 24. 4. а) $4\sqrt{3}$; б) $1\frac{1}{3}$. 5*. $2\pi\approx 6{,}28$.

К—2. *Вар. 1.* 1. 2. 2. $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}$. 3. а) $\frac{1}{2}$; б) 2. 4. (9; 1). 5*. $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. *Вар. 2.* 1. 2. 2. $\frac{\sqrt{a}+b}{\sqrt{a}}$. 3. а) $-\frac{1}{3}$; б) 5. 4. (25; 4). 5*. $\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. *Вар. 3.* 1. 3. 2. $a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$. 3. а) $\pm 0{,}5$; б) 2. 4. (—9; —4), (—4; —9), (4; 9), (9; 4). 5*. $[-2;\ 2)$. *Вар. 4.* 1. 2. 2. $a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$. 3. а) $\pm 0{,}5$; б) 0. 4. (9; 4), (4; 9). 5*. $(-\infty;\ 1)$.

К—3. *Вар. 1.* 1. Возрастает от $\frac{1}{3}$ до 27. 2. а) 8; б) 4. 3. [—3; 3]. 4*. $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. *Вар. 2.* 1. Убывает от 3 до $\frac{1}{27}$. 2. а) 3,5; б) 3. 3. $(-\infty;\ -2]\cup[2;\ \infty)$. 4*. $\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. *Вар. 3.* 1. Возрастает от $\frac{1}{16}$ до 16. 2. а) —0,5; б) 3. 3. $(-\infty;\ 0]\cup[2;\ \infty)$. 4*. $[1;\ \infty)$.

Вар. 4. **1.** Убывает от 16 до $\frac{1}{16}$. **2.** а) $-1{,}25$; б) 3. **3.** $[0; 4]$. **4*.** $[-1; \infty)$.

К—4. *Вар. 1.* **1.** Возрастает от -1 до 3. **2.** а) 4; -1; б) 4. **3.** $(-1; -0{,}5)$. **4.** $\left(\frac{1}{2}; 8\right)$. **5*.** $(0; 2]$. *Вар. 2.* **1.** Убывает от 1 до -3. **2.** а) -5; 1; б) 9. **3.** $(1; 5)$. **4.** $\left(\frac{1}{3}; 9\right)$. **5*.** $[-2; 0)$. *Вар. 3.* **1.** Убывает от 2 до -3. **2.** а) -8; 2; б) 4. **3.** $(0; 1)\cup(10; \infty)$. **4.** $\left(16; \frac{1}{4}\right)$. **5*.** $(2; 3]\cup(6; \infty)$. *Вар. 4.* **1.** Возрастает от -1 до 2. **2.** а) -9; 1; б) 5. **3.** $(0{,}1; 1)$. **4.** $\left(4; \frac{1}{2}\right)$. **5*.** $(4; 7]$.

К—5. *Вар. 1.* **1.** а) $e^x(\cos x-\sin x)$; 1; б) $\frac{1}{6x}$; $-1\frac{1}{3}$. **2.** $e^2-3\approx 4{,}4$. **3.** Убывает на $\left(0; \frac{1}{e}\right]$, возрастает на $\left[\frac{1}{e}; \infty\right)$, $x=\frac{1}{e}$ — точка минимума, $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{2}{e}$. **4*.** $(0; \infty)$. *Вар. 2.* **1.** а) $e^x(\sin x+\cos x)$; 1; б) $\frac{1}{6x}$; $-1{,}5$. **2.** $3-\ln 4\approx 1{,}61$. **3.** Убывает на $(-\infty; -1]$, возрастает на $[-1; \infty)$, $x=-1$ — точка минимума, $f(-1)=-\frac{1}{e}$. **4*.** $(-\infty; 2)$. *Вар. 3.* **1.** а) $2^x(\ln 2\cos x-\sin x)$; $\ln 2$; б) $\frac{6}{x}$; 12. **2.** $e^2-3\approx 4{,}4$. **3.** Возрастает на $(0; e]$, убывает на $[e; \infty)$ $x=e$ — точка максимума, $f(e)=\frac{2}{e}$. **4*.** $\min\limits_{[-2;2]} f(x)=f(0)=\frac{2}{\ln 3}$. *Вар. 4.* **1.** а) $3^x(\ln 3\sin x+\cos x)$; 1; б) $\frac{6}{x}$; 18. **2.** $4-\ln 9\approx 1{,}8$. **3.** Возрастает на $(-\infty; 1]$, убывает на $[1; \infty)$, $x=1$ — точка максимума, $f(1)=\frac{4}{e}$. **4*.** $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=f(0)=\frac{2}{\ln 2}$.

К—6. *Вар. 1.* **1.** $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n$, $n\in\mathbf{Z}$. **2.** $10\frac{2}{3}$. **3.** $(0; 3)$. **4.** $[-5; -3]\cup(3; \infty)$. **5.** $y=2x+1$. *Вар. 2.* **1.** $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n$, $n\in\mathbf{Z}$. **2.** $5\frac{1}{3}$. **3.** $(3; 1)$. **4.** $[-6; -2)\cup(2; \infty)$. **5.** $y=x+2$. *Вар. 3.* **1.** πn; $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **2.** $\frac{1}{6}$. **3.** $(5; 2)$. **4.** $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=f(1)=e^2-e\approx 4{,}7$; $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=f(0)=e$. **5.** $-\frac{\pi}{6}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. *Вар. 4.* **1.** $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **2.** $\frac{1}{6}$. **3.** $(4; -2)$. **4.** $\min\limits_{[-2;0]} f(x)=f(-1)=2e\approx 5{,}4$; $\max\limits_{[-2;0]} f(x)=f(0)=e^2\approx 7{,}4$. **5.** $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Примерные варианты экзаменационных работ за курс средней школы

Вар. 1. **1.** $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$; $2{,}5\pi$, $4{,}5\pi$. **2.** $-1{,}4$. **3.** $(-3;\ -\sqrt{7}]\cup[\sqrt{7};\ \infty)$. **4.** $6\frac{2}{3}$. **5.** $[0;\ 3)$. **6.** $\max\limits_{[-1;\ 6]} y=y(6)=10$. *Вар. 2.* **1.** πn; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. **2.** $y=-2x+1$. **3.** $(-\infty;\ -\sqrt{5}]\cup[\sqrt{5};\ 3)$. **4.** $2\frac{2}{3}$. **6.** $\min\limits_{[-3;\ 3]} y=y(3)=0$. *Вар. 3.* **1.** $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. **2.** Является. **3.** $(-0{,}25;\ -1{,}5)$. **4.** $[-3;\ -2]$; 3. **5.** $2\frac{1}{4}$. **6.** Слагаемые 6, 12, 10. *Вар. 4.* **1.** $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. **2.** $0{,}5\sqrt{a}$; нет. **3.** $(0{,}5;\ 2)$. **4.** $(-0{,}25;\ 0)\cup(0;\ 0{,}25]$. **5.** 2. **6.** Стороны прямоугольника 2; $2\frac{2}{3}$. *Вар. 5.* **1.** $\pm\frac{5\pi}{12}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. **2.** 1. Возрастает на $(-\infty;\ 1]$, убывает на $[1;\ \infty)$; $x=1$ — точка максимума, $y(1)=0{,}5$; функция равна 0 в точках $x=0$, $x=1\frac{1}{3}$. **4.** $(-0{,}5;\ 0)\cup(0;\ 1{,}5]$. **5.** 9. **6.** Стороны прямоугольника 6 м, 12 м. *Вар. 6.* **1.** 1. **2.** $[5;\ \infty)$; 3; -3. **3.** Число $\sqrt{7}$ является корнем данного уравнения. **4.** 4,5. **5.** Функция возрастает на $[-3;\ 3]$, убывает на $(-\infty;\ -3]$ и $[3;\ \infty)$; минимум в точке $x=-3$, $y(-3)=-6$; максимум в точке $x=3$, $y(3)=6$; точки пересечения графика с осью абсцисс $x=0$, $x=\pm 3\sqrt{3}$. **6.** Размеры участка 240 м, 240 м. *Вар. 7.* **1.** πn, $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. **2.** $(26;\ -7)$; $(2;\ 1)$. **3.** $(1;\ 3]$. **4.** $[0;\ 9]$. **5.** 4,5. **6.** Точка с координатами $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$. *Вар. 8.* **1.** $(-\infty;\ -2{,}5)\cup(0;\ 2{,}5]$. **2.** $-\frac{3}{\cos 2x}$; -6. **3.** $4\frac{2}{3}$. **4.** $[0{,}2;\ 1)$. **5.** 9. **6.** Точка с координатами $(\pi;\ \pi+2)$. *Вар. 9.* **1.** $[-2;\ -1{,}5)\cup(-1{,}5;\ 2]$. **2.** Возрастает на $(-\infty;\ 3)$. **3.** 13. **4.** 5,6. **5.** $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{4}$. **6.** 45 м. *Вар. 10.* **1.** $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. **2.** -5. **3.** $(1,\ 1{,}5)$. **4.** $5\frac{1}{3}$. **5.** $(-3;\ 2)\cup[4;\ \infty)$. **6.** Сторона основания резервуара равна 2 м, высота 1 м. *Вар. 11.* **1.** πn, $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$; $-\pi$; 0; $\frac{\pi}{2}$; π; 2π. **2.** $(0{,}68;\ 0{,}7)$. **3.** $F(x)=-2\cos 2x-\frac{1}{x}+\frac{3}{\pi}$. **4.** 3. **5.** -3; 3. **6.** $5\frac{1}{3}\pi$ дм^3. *Вар. 12.* **1.** $(2;\ 2{,}12)$. **2.** $\left(1\frac{1}{4}\pi+2\pi n;\ -\frac{3\pi}{4}-2\pi n\right)$, $n\in \mathbf{Z}$. **3.** $10\frac{2}{3}$. **4.** 2. **5.** В точке с координатами $(0;\ 0)$. **6.** $62{,}5\pi$ дм^3. *Вар. 13.* **1.** $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\operatorname{arctg} 0{,}5+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$, число $0{,}75\pi$ является корнем данного уравнения. **2.** 5. **3.** 4,5. **4.** $\operatorname{tg}\alpha=-1$, $y=-x+4$.

5. $y=\ln x$. 6. $\max\limits_{(0,5;\sqrt{3})} V(x)=V(1)=1$ дм^3. *Вар. 14.* 1. (1,5; 4). 2. 4,5. 3. $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$. Число $7\frac{1}{6}\pi$ является корнем данного уравнения. 4. $\operatorname{tg}\alpha=4$, $y=4x-2$. 5. $(3;\infty)$. 6. $\min\limits_{(1;4)} S(x)=S(2)=24$ дм^2. *Вар. 15.* 1. $(0,4;\infty)$. 2. $3\operatorname{tg}2\alpha$; $-\sqrt{3}$. 3. $-\sqrt[4]{8}$. 4. Возрастает на $[-2;2]$, убывает на $(-\infty;-2]$ и на $[2;\infty)$. 5. (4; 4,5). 6. 288 см^3. *Вар. 16.* 1. 2; например, $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\alpha=2{,}5\pi$. 2. $(\log_3 2;\infty)$. 3. $\frac{25}{9}$. 4. $\frac{2}{3}$. 5. Убывает на $\left(0;\frac{1}{e}\right]$, возрастает на $\left[\frac{1}{e};\infty\right)$; $x=\frac{1}{e}$ — точка минимума, $y\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{2}{e}$. 6. 4 см, $21\frac{1}{3}$ см^3. *Вар. 17.* 1. $\frac{1}{\cos 2\alpha}$; $\sqrt{2}$. 2. 3. 3. Возрастает на $(-\infty;1]$, убывает на $[1;\infty)$; $x=1$ точка максимума, $f(1)=\frac{4}{e}$. 4. $10\frac{2}{3}$. 5. (14; 9). 6. 144 дм^3. *Вар. 18.* 1. $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$; $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{2\pi}{3}$. 2. -2; 2. 3. 2,25. 4. (2; 1). 5. (3; 5). 6. Сторона основания призмы равна 6 м, высота 4 м. *Вар. 19.* 1. 1,5. 2. $2\cos\alpha$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$. 3. e, $\frac{1}{\sqrt{e}}$. 4. Убывает на $(-\infty;0]$ и на $[2;\infty)$, возрастает на $[0;2]$; $x=0$ — точка минимума, $x=2$ — точка максимума, $f(0)=0$, $f(2)=1\frac{1}{3}$. 5. $y=x-0{,}5$. 6. 4; $32\sqrt{3}$. *Вар. 20.* 1. $(-\infty;0)\cup(6;8]$. 2. Объединение четырех прямых: $y=2$, $y=-2$, $x=2{,}5$, $x=-2{,}5$. 3. $\left[\frac{\pi}{12}+\pi n, \frac{3\pi}{4}+\pi n\right]$, $n\in Z$. 4. $x^2+3\ln x+C_1$, если $x>0$; $x^2+3\ln(-x)+C_2$, если $x<0$. 5. 2. 6. 2 см.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Ивлев Борис Михайлович
Саакян Самвел Манасович
Шварцбурд Семен Исаакович

**ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ
ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА
ДЛЯ 11 КЛАССА**

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. Н. Белоновская*
Младший редактор *Н. В. Сидельковская*
Художники *Е. В. Соганова, Е. М. Молчанов*
Художественный редактор *Е. Р. Дашук*
Технический редактор *С. С. Якушкина*
Корректоры *Т. С. Крылова, И. В. Чернова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с диапозитивов 21.05.07. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Литературная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 6,79. Тираж 15 000 экз. Заказ № 19217.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение»
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат»
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru